

Función de Green vía mapeo conforme para el semiplano superior agrietado

Green's function via conformal mapping for the cracked upper half plane

Ricardo Cedeño Delgado y Carmen Vanegas Espinoza

Recepción: 11/01/2022 **Aceptación:** 27/01/2022 **Publicación:** 30/01/2022

Abstract The goal of this research work is to find a Green function for a complex cracked (fractured) domain. There are several methods for obtaining a Green function for a particular domain. In this article we find a Green harmonic function for the upper half plane with a crack (linear fracture) in the given segment from 0 to i using conformal mapping theory, specifically the Schwarz Christoffel transformation and the conformal invariance method. The Green function obtained enables the construction of the Poisson Kernel, which in turn allows integral representations of solutions of boundary value problems for partial derivative equations.

Keywords complex cracked domains, conformal mappings, Schwarz Christoffel transformation, Green harmonic functions, conformal invariance.


Resumen La meta de este trabajo de investigación es encontrar una función de Green para un dominio complejo agrietado (fracturado). Existen varios métodos para la obtención de una función de Green de un dominio particular. En este artículo se encuentra una función armónica de Green para el semiplano superior con una grieta (fractura lineal) en el segmento dado de 0 a i utilizando la teoría de mapeos conformes, específicamente la transformación de Schwarz Christoffel y el método de invarianza conforme. La función de Green obtenida posibilita la construcción del Kernel de Poisson lo cual a su vez permite representaciones integrales de soluciones de problemas de valores de frontera para ecuaciones en derivadas parciales.

Palabras Claves dominios complejos agrietados, funciones armónicas de Green, invarianza conforme, mapeos conformes, transformación de Schwarz Christoffel.

Ricardo Antonio Cedeño Delgado, M.Sc.(c)

Estudiante de Maestría, Universidad Técnica de Manabí, UTM, Instituto de Posgrados, Portoviejo, Ecuador, e-mail: rcedeno6595@utm.edu.ec  <https://orcid.org/0000-0001-6674-3729>

Carmen Judith Vanegas Espinoza, Ph.D.

Docente, Universidad Técnica de Manabí, UTM, Instituto de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática y Estadística, Portoviejo, Ecuador, e-mail: carmen.vanegas@utm.edu.ec,  <https://orcid.org/0000-0003-0748-5963>

1 Introducción

La teoría de mapeos conformes del análisis complejo permite transformar una región del plano complejo en otra y constituye un método para hallar funciones armónicas de Green y por consiguiente dar solución a problemas con condiciones de frontera.

Muchas aplicaciones en las distintas ciencias básicas y aplicadas como Matemática, Física, e ingenierías Hidráulica y Eléctrica, requieren la construcción de un mapeo conforme desde el semiplano superior a un dominio donde la frontera consiste en segmentos de línea recta. La transformación conforme que nos permite realizar este tipo de mapeos es la transformación de Schwarz Christoffel.

Esta transformación conforme ha sido estudiada ampliamente por diversos autores. En McKean (1999) la transformación de Schwarz Christoffel permite dar una prueba del teorema de transformación de Riemann para regiones simplemente conexas, cuya frontera sea una curva de Jordan continua a trozos. En Marković, Jufer, y Perriard (2006) la transformación de Schwarz Christoffel es una herramienta para estudiar fenómenos relacionados con el magnetismo. En Chuang (2000) la transformación de Schwarz Christoffel es utilizada para el estudio de problemas relacionados con el flujo de fluidos.

Las funciones de Green constituyen herramientas importantes para alcanzar la solución de problemas de valores de frontera. En Begehr y Vaitekhovich (2011) se estudian métodos para encontrarlas. Estos métodos se han usado en varios artículos de diversos autores, por ejemplo: en Vaitsiakhovich (2008) que se obtiene la función de Green de un anillo, en Abdymanapov y Tungatarov (2005) se encuentra la función de Green para un dominio que consiste en un cuarto de plano, en Wang y Wang (2010) se halla la función de Green para un dominio triangular, por citar algunos. Uno de los métodos estudiados en Begehr y Vaitekhovich (2011) es mediante invarianza conforme.

En el caso particular de este estudio se utiliza la teoría de mapeos conformes para calcular una función de Green del semiplano superior fracturado en el segmento de 0 a i . El objetivo general de este artículo es:

- Obtener de forma explícita la representación de Green $G_{1,\Omega}(z, \zeta)$ para el semiplano superior con una fractura lineal en un segmento de 0 a i , Ω , utilizando la transformación de Schwarz Christoffel y el método de invarianza conforme.

Se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Deducir la función w que mapea el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ sobre el semiplano superior, H^+ , usando la transformada de Schwarz Christoffel.
- Aplicar el mapeo conforme w dado por la transformación de Schwarz Christoffel a la función de Green del semiplano superior, para obtener la función de Green del dominio fracturado usando las teorías pertinentes establecidas en las referencias matemáticas correspondientes.

Este artículo está desarrollado de la siguiente forma: en la sección 2 se establecen las definiciones y teoremas necesarios para hallar la solución del problema

planteado. En la sección 3 se da respuesta al primer objetivo específico al calcular la función $w : \Omega \rightarrow H^+$, que es un mapeo conforme de un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ sobre H^+ , mediante la transformación de Schwarz Christoffel. Luego usando el método de invarianza conforme se calcula la función $G_{1\Omega}(z, \zeta)$ y se verifica que esta función cumple las propiedades de las funciones de Green y que es simétrica, alcanzando de esta manera el segundo objetivo específico y por consiguiente el objetivo general de este artículo.

2 Preliminares

Para obtener la representación de Green para el dominio planteado en este problema es necesario conocer las siguientes definiciones y teoremas.

2.1 Mapeo conforme

Definición 1. Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se llama conforme o transformación conforme en $z_0 \in \Omega$, si f preserva ángulos entre curvas diferenciables que se intersectan en z_0 y si f es real y diferenciable en z_0 (Villa, 1989).

Teorema 1. Si f es una función holomorfa en \mathbb{C} y si $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 (Villa, 1989).

El recíproco del teorema 1 también es cierto.

Teorema 2. Villa (1989). Si f es conforme en una región Ω y su diferencial (real) $\neq 0$ en Ω , entonces f es analítica en Ω ($f'(z_0) \neq 0$ para z_0 en Ω).

Considerando el semiplano superior $Im(z) > 0$ y un dominio G en el plano w , se enuncia el siguiente resultado, conocido como teorema de Schwarz-Christoffel:

Teorema 3. Sea P un polígono en el plano w con vértices w_1, w_2, \dots, w_n y ángulos exteriores α_k donde $-\pi < \alpha_k < \pi$, como se muestra en la figura 1 (Howell y John, 1997). Existe un mapeo conforme uno a uno $w = f(z)$ desde el semiplano superior $Im(z) > 0$ sobre G , que satisface las condiciones de contorno :

$w_k = f(x_k)$ para $k = 1, 2, \dots, n - 1$ y $w_n = f(\infty)$ donde $x_1 < x_2 < \dots < \infty$.

La derivada $f'(x)$ es:

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (z - x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (z - x_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}} \quad (1)$$

y la función f puede ser expresada por la integral indefinida:

$$f(z) = B + A \int (z - x_1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (z - x_2)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (z - x_{n-1})^{-\frac{\alpha_{n-1}}{\pi}} dz \quad (2)$$

donde A y B son constantes adecuadamente elegidas. Dos de los puntos $\{x_k\}$ pueden elegirse arbitrariamente, y las constantes A y B determinan el tamaño y la posición de P .

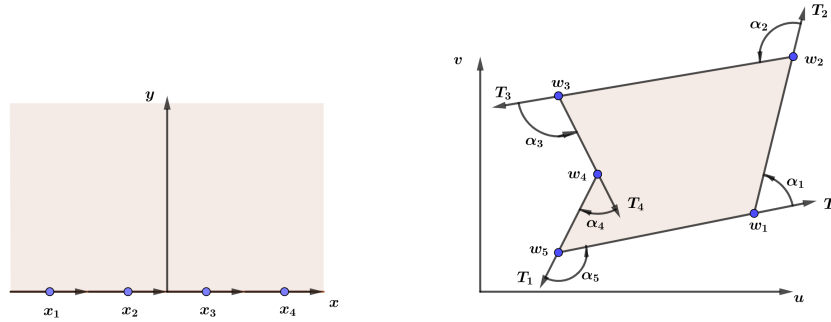


Figura 1: Mapeo de Schwarz Christoffel con $n = 5$ y $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_4 > \pi$.
Fuente: Adaptado de Howell y John (1997)

2.2 Funciones de Green

Las funciones de Green son herramientas importantes para hallar representaciones integrales como solución de problemas de valores iniciales y de frontera para ecuaciones diferenciales parciales. La función de Green para el semiplano superior H del plano complejo \mathbb{C} tiene las siguientes propiedades para cualquier $\zeta \in H$ como una función de z .

- $G(z, \zeta)$ es armónica en $H \setminus \{\zeta\}$,
- $G(z, \zeta) + \log |\zeta - z|$ es armónica en un entorno de ζ ,
- $\lim_{\zeta \rightarrow t} G(z, \zeta) = 0$ para todo $t \in \partial H$

La función de Green para el semiplano superior H del plano complejo \mathbb{C} es:

$$G_1(z, \zeta) = \log \left| \frac{\bar{\zeta} - z}{\zeta - z} \right|^2 \quad (3)$$

donde $z, \zeta \in H, z \neq \zeta$. Por conveniencia, se utiliza G_1 en lugar de G y G_1 se llama función de Green de H (Gärtner, 2006).

En Begehr (1994) se estudia a profundidad lo referente a las funciones de Green y sus propiedades.

El método por el cual vamos a obtener la función de Green para el dominio Ω es mediante invarianza conforme y se enuncia a continuación.

2.3 Funciones de Green vía invarianza conforme

Teorema 4. Sean G y Ω regiones tales que existe una función analítica f uno a uno de G sobre Ω ; sea $a \in G$ y $\alpha = f(a)$. Si g_a y γ_α son las funciones de Green de G y Ω con singularidades a y α respectivamente (Conway, 1978), entonces

$$g_a(z) = \gamma_\alpha(f(z)).$$

Este teorema fue utilizado para establecer la siguiente definición:

Definición 2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio con función de Green $G_{1\Omega}(w, \omega)$ y $w : D \rightarrow \Omega$ un mapeo conforme de un dominio $D \subset \mathbb{C}$ sobre Ω (Begehr y Vaitekhovich, 2011). Entonces la función de Green para D está dada por:

$$G_{1D}(z, \zeta) = G_{1\Omega}(w(z), \omega(\zeta)). \tag{4}$$

3 Resultados

Definimos el semiplano superior como $H^+ = \{z : z \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0\}$ y el semiplano superior con una fractura lineal en un segmento de 0 a i como $\Omega = H^+ \setminus \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}z \leq 1\}$.

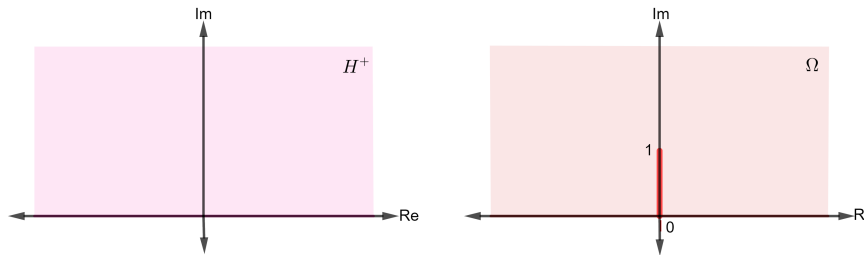


Figura 2: Regiones H^+ y Ω
Fuente: Elaboración propia

3.1 Cálculo de la función $f : \Omega \rightarrow H^+$ mediante la transformada de Schwarz Christoffel

Sea $g : H^+ \rightarrow \Omega$, se elige convenientemente $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, w_1 = -d, w_2 = i, w_3 = d$.

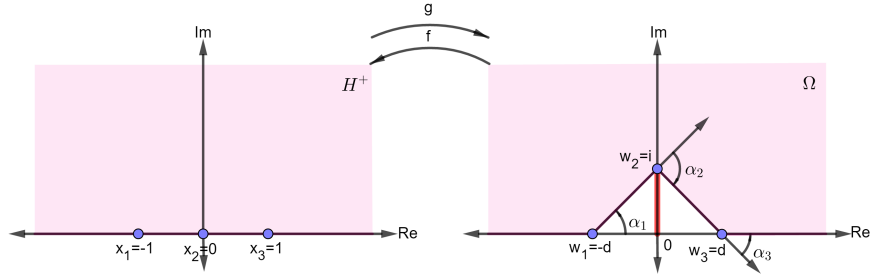


Figura 3: Mapeo de Schwarz Christoffel

Fuente: Adaptado de Howell y John (1997)

Reemplazando en (1) los valores de x , se obtiene la derivada de la aplicación g :

$$g'(z) = A(z+1)^{-\frac{\alpha_1}{\pi}} (z)^{-\frac{\alpha_2}{\pi}} (z-1)^{-\frac{\alpha_3}{\pi}}.$$

A medida que la distancia d se hace muy pequeña, es decir que $d \rightarrow 0$, observamos que w_1 y w_3 también se hacen muy pequeños, es decir que $w_1 \rightarrow 0$ y $w_3 \rightarrow 0$, y los ángulos α_1 , α_2 y α_3 varían, quedando que $\alpha_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 \rightarrow -\pi$, $\alpha_3 \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Reemplazando los ángulos α_1 , α_2 y α_3 en la representación de $g'(z)$ queda:

$$g'(z) = A \frac{z}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Entonces $g(z)$ es igual a:

$$g(z) = A \int \frac{zdz}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} + B.$$

Resolviendo la integral se determina que g está dada por:

$$g(z) = A(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + B.$$

Los valores de frontera $g(\pm 1) = 0$ y $g(0) = i$, tomando $A = 1$ y $B = 0$ nos dan como resultado la función:

$$g(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces $f = g^{-1} : \Omega \rightarrow H^+$, de donde

$$w = f(z) = (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

3.2 Cálculo de la función de Green para el dominio Ω por invarianza conforme

Sea H^+ el semiplano superior del plano complejo \mathbb{C} con función de Green dada por (3) y que ahora denotaremos por $G_{1H^+}(\cdot, \cdot)$, y sea $w : \Omega \rightarrow H^+$ el mapeo conforme del dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ sobre H^+ que se obtiene mediante el método de Schwarz Christoffel. Entonces la función de Green para Ω está dada por:

$$G_{1\Omega}(z, \zeta) = G_{1H^+}(w(z), \omega(\zeta))$$

Usando esta última ecuación obtenemos:

$$G_{1\Omega}(z, \zeta) = \log \left| \frac{(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \quad (6)$$

que es la candidata a función de Green para el dominio Ω .

3.3 Verificación de las propiedades de las funciones de Green para $G_{1\Omega}(z, \zeta)$

Verificamos que la ecuación (6) cumple las propiedades de las funciones de Green y el lemma sobre la simetría de la función.

- $G_{1\Omega}(z, \zeta)$ es armónica en $\Omega \setminus \{\zeta\}$,

$$\begin{aligned} G_{1\Omega}(z, \zeta) &= \log \left| \frac{(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \\ &= \log \left[(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] - \log \left[(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \log \left[(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] - \log \left[(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \frac{\partial G_{1\Omega}(z, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \left[(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \left[(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \left[(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \left[(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\zeta \left\{ (\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right\}}{\left[\zeta^2 + 1 - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] \left[\zeta^2 + 1 - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} (\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

y esto implica que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{\partial G_{1\Omega}(z, \zeta)}{\partial \zeta} \right) = 0$$

Se verifica que la función (6) es armónica salvo en el punto ζ .

- $G_{1\Omega}(z, \zeta) + \log |\zeta - z|$ es armónica en una vecindad de ζ ,

$$\begin{aligned} G(z, \zeta) &= \log \left| \frac{(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 + \log |\zeta - z| \\ &= \log \left[(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] - \log \left[(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \log \left[(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] - \log \left[(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right] + \log |\zeta - z| \end{aligned}$$

Se verifica que restando la solución fundamental la función (6) es armónica en una vecindad de ζ .

- $\lim_{\zeta \rightarrow t} G_{1\Omega}(z, \zeta) = 0$ para todo $t \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} &= \lim_{\zeta \rightarrow t} G_{1\Omega}(z, \zeta) = \lim_{\zeta \rightarrow t} \log \left| \frac{(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \\ &= \log \left| \frac{(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 = 0 \end{aligned}$$

Se verifica que en la frontera la función (6) se anula.

Lemma 1. La función $G_{1\Omega}$ satisface que $G_{1\Omega}(z, \zeta) = G_{1\Omega}(\zeta, z)$.

$$\begin{aligned} G_{1\Omega}(\zeta, z) &= \log \left| \frac{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \\ &= \log \left| \frac{(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 \\ &= \log \left| \frac{(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2 = G_{1\Omega}(z, \zeta) \end{aligned}$$

Verificándose así que la función dada por (6) es simétrica.

Observación La función de Green (6) también está garantizada por el teorema 4.

Con la obtención de la ecuación (5) que es la función w que mapea el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ sobre el semiplano superior H^+ , se cumple el primer objetivo específico. Con la obtención de la ecuación (6) y con la verificación del cumplimiento de las propiedades de las funciones de Green para la función definida por esa ecuación, se muestra que esta es la función de Green $G_{1\Omega}(z, \zeta)$ para el semiplano superior con una fractura lineal en un segmento de 0 a i cumpliéndose de esta forma con el segundo objetivo específico planteado.

4 Discusión

La función de Green obtenida como resultado de este trabajo sirve para encontrar representaciones integrales de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales planteadas sobre dominios como el propuesto en este artículo. En Gärtner (2006) y Begehr (2016) se utiliza la función de Green obtenida para representar soluciones del problema de Dirichlet, Neumann y Robin. En Vaitsiakhovich (2008), Abdymanapov y Tungatarov (2005), Wang y Wang (2010) y Hanxing (2020) se obtuvo la función de Green para encontrar las soluciones de diferentes problemas de frontera de ecuaciones en derivadas parciales; en el primer caso por transformaciones conformes y en los tres siguientes por otros métodos.

Hasta donde los autores conocen, la función de Green que se obtuvo en esta investigación mediante el método de invarianza conforme, no ha sido encontrada por otros métodos como el método de parqueting o el problema de Schwarz, los cuales pueden verse en Begehr y Vaitekhovich (2011). Además su obtención es un aporte adicional a la teoría de funciones de Green para el tipo de dominio planteado y a la teoría de mapeos conformes. Aunque la transformación de Schwarz Christoffel se usó en este trabajo para encontrar la función de Green del dominio planteado, esta tiene otras aplicaciones interesantes e importantes en el campo de la ingeniería, ver Howell y John (1997) y Villa (1989).

5 Conclusiones

En el presente trabajo se logró obtener la función $w = (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ dada por (5) que mapea el semiplano superior fracturado en el segmento de 0 a i , Ω , sobre el semiplano superior H^+ usando la transformación de Schwarz Christoffel (ver Teorema 3). Luego se construyó la función de Green

$$G_{1\Omega}(z, \zeta) = \log \left| \frac{(\bar{\zeta}^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right|^2$$

mostrada en (6), para el semiplano superior con una fractura lineal en el segmento de 0 a i utilizando la transformación de Schwarz Christoffel y empleando el método de invarianza conforme. Además se verificó que la función de Green cumple con las propiedades de tales funciones.

Con la ayuda de la función de Green obtenida, se puede construir el Kernel de Poisson y resolver problemas de valores de frontera para ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas, como por ejemplo la ecuación de Poisson. Esto se hará en futuros trabajos.

La construcción de funciones de Green por diferentes métodos y para diferentes regiones sigue siendo un tema de investigación de interés en diferentes ramas de las ciencias puras y aplicadas.

6 Bibliografía

Referencias

- Abdymanapov, H., S. Begehr, y Tungatarov, A. (2005). Some Schwarz problems in a quarter plane. *Eurasian Math.J.3*(3), 22–35. doi: 10.1142/9789812773159_0001
- Begehr, H. (1994). *Complex Analytic Methods for Partial Dierential Equations*. World Scientific.
- Begehr, H. (2016). Explicit Solutions of the Poisson Equation in Plane Domains. En M. M. Methods, H. P. C. in Science, y Technology (Eds.), (Vol. 171, pp. 111–127). Springer, Singapore. doi: 10.1007/978-981-10-1454-3_10
- Begehr, H., y Vaitekhovich, T. (2011). How to find harmonic green functions in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 56(12), 1169-1181. doi: 10.1080/17476933.2010.534157
- Chuang, J. M. (2000). Numerical studies on non-linear free surface flow using generalized Schwarz-Christoffel transformation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 32, 745-772.
- Conway, J. (1978). *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag New York.

- Gärtner, E. (2006). *Basic complex boundary value problems in the upper half plane* (Doctoral Thesis). Freie Universität Berlin.
- Hanxing, L. (2020). Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 1–17. doi: 10.1080/17476933.2020.1816984
- Howell, R., y John, M. (1997). *Complex analysis for mathematics and engineering* (third edition ed.). Jones and Bartlett Publishers.
- Marković, M., Jufer, M., y Perriard, Y. (2006). A square magnetic circuit analysis using Schwarz-Christoffel mapping. *Mathematics and Computers in Simulation*, 71, 460-465.
- McKean, H. P. (1999). A quick proof of Riemann's mapping theorem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 52, 405-409.
- Vaitsiakhovich, T. (2008). *Boundary Value Problems for Complex Partial Differential Equations in a Ring Domain* (Doctoral Thesis). Freie Universität Berlin.
- Villa, G. (1989). *Introducción a funciones analíticas y transformaciones conformes*.
- Wang, Y., y Wang, Y. (2010). On Schwarz-type boundary-value problems of polyanalytic equation on a triangle. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia Mathematica*, 84.