MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL
2023, Vol. 21, No. 1 Enero - Junio

Medidas ergódicas infinitas para transformaciones sobre $\mathbb{R}$ con una discontinuidad y asíntotas horizontales

Infinite ergodic measures for transformations on $\mathbb{R}$ with a discontinuity and horizontal asymptotes

Miguel Mieles Bachicoria y Bladismir Ruiz Leal

Recepción: 30/05/2022 **Aceptación:** 07/11/2022 **Publicación:** 31/01/2023

Abstract In the space of transformations, the study of the existence of infinite $\sigma - finite$ measures is rather scarce, are limited to a couple of examples, one of which is the Boole transformation, which preserves the Lebesgue measure and is ergodic with respect to this measure. In this paper we consider this type of transformations with two horizontal asymptotes, showing for a large family of four parameters that, under certain conditions, exhibits an infinite ergodic measure and that under other conditions to the parameter space that family exhibits an ergodic probability measure; in both cases the measure is equivalent to the Lebesgue measure.
Keywords horizontal asymptotes, infinite ergodic measures, infinite invariant measures, return transform, transformations in R.

Resumen En el espacio de las transformaciones el estudio de la existencia de medidas $\sigma - finita$ infinitas es bastante escaso, se limitan a un par de ejemplos, uno de ellos es la transformación de Boole, la cual preserva la medida de Lebesgue y es ergódica respecto a esta medida. En este trabajo se considera este tipo de transformaciones con dos asíntotas horizontales, demostrando para una familia amplia de cuatro parámetros que, bajo ciertas condiciones, exhibe una medida ergódica infinita y que bajo otras condiciones al espacio de parámetros esa familia exhibe una medida de probabilidad ergódica; en ambos casos la medida es equivalente a la medida de Lebesgue.
Palabras Claves asíntotas horizontales, medidas ergódicas infinitas, medidas invariantes infinitas, transformación de retorno, transformaciones en R.

Miguel Ángel Mieles Bachicoria, M.Sc.
Estudiante de Maestría, Universidad Técnica de Manabí, UTM, Instituto de Posgrado, Portoviejo, Ecuador, e-mail: donmieles25@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-5986-0177

Luis Bladismir Ruiz Leal, Ph.D.
Docente, Universidad Técnica de Manabí, UTM, Instituto de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática y Estadística, Portoviejo, Ecuador, e-mail: bladismir@gmail.comandluis.ruiz@utm.edu.ec, https://orcid.org/0000-0002-7737-3847

1 Introducción

La transformación $B(x) = x - \frac{1}{x}$, conocida como transformación de Boole es un prototipo de una función no uniformemente expansora que es ergódica respecto a la medida de Lebesgue (Adler y Weiss, 1973). El trabajo de Adler y Weiss (1973) originó el abordaje de varios problemas, considerados por varios autores, sobre las transformaciones que preservan una medida $\sigma - finita$ infinita y sobre la teoría ergódica infinita (Aaronson, 1978; Bowen, 1979; Schweiger, 1975a, 1975b; Thaler, 1980, 1983; Zweimüller, 1998, 2000).

En los ejemplos considerados en esos trabajos sobre intervalos no acotados, las transformaciones tienen derivadas no uniformemente expansoras (mayor o igual a uno), $B(x) = x - \frac{1}{x}$, $T = \tan(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & \text{si} \quad x \in [0,1) \\ \\ x - 1, & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}, \quad B_N(x) = x - \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{x - b_i},$$

para $a_i > 0$, $1 \leq i \leq N$ y $b_1 < b_2 \cdots < b_N$.

Todo pareciera indicar que el estudio de las transformaciones sobre $\mathbb{R}$ o sobre un intervalo no acotado se concentra en transformaciones expansoras o no uniformemente expansoras.

En este trabajo se demuestra que esto no es así, es decir, la condición de que las transformaciones sean expansoras o no uniformemente expansoras no es una condición suficiente para la existencia de medidas $\sigma - finitas$ absolutamente continuas a la de Lebesgue. Se planteó como objetivo determinar la existencia de medidas absolutamente ergódicas, absolutamente continuas a la de Lebesgue para transformaciones $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ continuas con una asíntota vertical en $x = 0$ y asíntotas horizontales. Sorpresivamente, en este trabajo se muestra la existencia de una familia $f_{a,b,\alpha,\beta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ a cuatro parámetros definidos por:

$$f = f_{a,b,\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{(-x)^{\alpha}}, & \text{si } x < 0 \\ \\ a - \dfrac{a^{\beta+1}}{x^{\beta}}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

que exhibe una medida infinita ergódica equivalente a la medida de Lebesgue. De hecho, se prueba también que fijando α y β, satisfaciendo alguna condición, existe una región abierta en el espacio de parámetros (a, b) para los cuales f admite una medida de probabilidad ergódica equivalente a la medida de Lebesgue, donde $f'(x)$ converge uniformemente a cero cuando $|x| \to +\infty$.

Es importante mencionar que no existe un resultado general para transformaciones por parte en $\mathbb{R}$ sobre existencias de medidas ergódicas, absolutamente continuas a la de Lebesgue. Las familias consideradas en este trabajo ayudan a descifrar cuáles son los ingredientes para obtener un resultado general en esta dirección. Este tipo de transformaciones con asíntota vertical y horizontal han sido estudiados desde el punto de vista de la dinámica topológica, consiguiendo resultados de transitividad y una codificación con la dinámica simbólica (Leal, Mata, y Muñoz, 2018; Ruiz Leal, Tineo, y Lugo, 2022; Vera y Leal, 2022).

Concretamente, se demostró, para $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 0$ y $b > 0$ los siguientes resultados.

Teorema 1. *Sean $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Si $\alpha\beta = 1$, $\beta > 1$ y $a^{\alpha+1} < b < \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ entonces, f admite una única medida de probabilidad ergódica equivalente a la medida de Lebesgue.*

Teorema 2. *Sean $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Con $\alpha\beta = 1$ y $\beta > 1$. Si $a^{\alpha+1} = b$ o $b = \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ entonces, f preserva una única medida infinita ergódica equivalente a la medida de Lebesgue.*

Teorema 3. *Sea $a \in \mathbb{R}^+$, Si $\alpha = \beta = 1$ y $b = a^2$, entonces f preserva una única medida infinita ergódica equivalente a la de Lebesgue.*

El trabajo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se estudian las medidas invariantes sobre transformaciones por partes en el intervalo. En la sección 3, se considera la aplicación de primer retorno y sus propiedades. Finalmente, en la sección 4 se presenta la demostración de los resultados.

2 Medidas invariantes sobre transformaciones por parte en el intervalo

En esta sección, λ denota la medida de Lebesgue normalizada al intervalo $[0, a]$. Sea $I = [0, a]$ un intervalo y sea $\mathcal{P}$ una partición finita en subintervalos, los intervalos pueden ser abiertos, semiabiertos y cerrados, no hay restricciones.

Más específicamente, sea $\mathcal{P} = \{I_1, \ldots, I_N\}$ donde $I = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$ y $I_i \cap I_j = \emptyset$, $i \neq j$, $N \geq 2$.

Sea h una transformación de I sobre si mismo con h^n denotando la composición de n veces de h consigo mismo. h es una *transformación de Markov* si:

(I) (*suavidad*) Para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, $h|_{I_i}$ tiene una extensión C^2 en la clausura de I_i, $\bar{I}_i$.
(II) (*invertibilidad local*) Para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, h es estrictamente monótona en $\bar{I}_i$.
(III) (*propiedad de Markov*) Para cada $J \in \mathcal{P}$, existe un subconjunto $\mathcal{P}(J)$ de $\mathcal{P}$ tal que $\tau(J) = \bigcup\{\overline{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \in \mathcal{P}(J)\}$.
(IV) (*aperiodicidad*) Para cada $J \in \mathcal{P}$, existe un entero positivo q tal que $h^q(\bar{J}) = I$.

El item (ii) significa que $h|_{\bar{I}_i} : \bar{I}_i \longrightarrow h(\bar{I}_i)$ es una función biyectiva.

Definición 1. Sea $\mathcal{P}$ una partición finita de $I = [0, a]$. Una transformación de Markov h sobre I es expansiva si $h|_{I_i}$ es de clase C^1 y existe $\alpha > 1$ tal que $h'(x) \geq \alpha$ para todo $x \in \mathrm{int}(I_i)$ y para $1 \leq i \leq N$.

Teorema 4. *(Teorema del folklore) Sea $\mathcal{P}$ una partición finita del intervalo $[0, a]$. Si $h : [0, a] \longrightarrow [0, a]$ es una transformación de Markov expansiva, entonces, h tiene una única medida invariante de probabilidad ergódica equivalente a la medida de Lebesgue.*

La demostración de este teorema clásico de la teoría ergódica se puede ver en Boyarsky y Gora (2012).

Ahora, se estudia un resultado sobre la existencia de medidas invariantes infinitas sobre el intervalo, se seguirán las ideas expuestas en Thaler (1980, 1983). Considere las transformaciones $T : [0, a] \to [0, a]$ del siguiente tipo:
Existe una familia finita o infinita $\mathcal{P}_1 = \{I_k : k \in D\}$ de subintervalos de $[0, a]$ tales que

$$\lambda\left(\bigcup_{k\in D} I_k\right) = a$$

Se supone que T satisface las siguientes condiciones:
(T1) $T|_k$ es dos veces diferenciable, y $\overline{TI_k} = [0, a]$ para todo $k \in D$.
(T2) Existe un conjunto finito no vacío $J \subseteq D$ tal que Z_j, $j \in J$, contiene un punto fijo x_j con $T'\left(x_j\right) = 1$ (punto fijo indiferente).
(T3) $|T'| \geq \rho(\varepsilon) > 1$ sobre $\bigcup\limits_{k\in D} Z_k \setminus \bigcup\limits_{j\in J} \left(x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon\right), \forall \varepsilon > 0$.
(T4) $\exists\, \eta > 0$ tal que para todo $j \in J$,
T' es decreciente en $\left(x_j - \eta, x_j\right) \cap Z_j$, y
T' está aumentando en $\left(x_j, x_j + \eta\right) \cap Z_j$ (x_j es una fuente regular).
(T5) $T''/\,(T')^2$ está acotado en $\bigcup\limits_{k\in I} Z_k$ (condición de Adler).

Teorema 5. *(Thaler, 1980, 1983): Si $T : [0, a] \to [0, a]$ satisface las condiciones (T1) - (T5) entonces, T admite una única medida invariante σ-finita μ, con μ equivalente a λ y $\mu([0, a]) = \infty$.*

3 Aplicación de primer retorno

Definición 2. $h : X \to X$ es una transformación no singular sobre un espacio $\sigma - finito$ $(X, \mathfrak{B}, \lambda)$, si para todo $A \in \mathfrak{B}$ con $\lambda(A) = 0$ se tiene que $\lambda(h^{-1}(A)) = 0$.
Un conjunto $A \in \mathfrak{B}$ es recurrente si $A \subseteq \bigcup\limits_{n\geq 1} h^{-n}(A) \mathrm{mod}(\lambda)$. Esto permite definir la aplicación de primer retorno sobre A, $h_A : A \to A$ definida por $h_A(x) = h^{n(x)}(x)$, donde $n(x) = \mathrm{mín}\{n \geq 1 : h^n(x) \in A\}$

Para las transformaciones de las cuales ya se consiguieron una aplicación de primer retorno h_A, para algún A, se tiene el siguiente resultado. Proposición 3.6.2 en Boyarsky y Gora (2012).

Proposición 1. *Sea $h : X \longrightarrow X$ una función medible, y sea $A \subset X$. Si existe una aplicación de primer retorno $h_A : A \longrightarrow A$ que preserva una medida μ_A entonces, h preserva una medida μ definida por*

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \mu_A(h^{-i}(B) \cap A_k),$$

donde $B \in \mathfrak{B}$ y $A_k = \{x \in A : n(x) = k\}$.

Observación 1. En la proposición 1 suponga que $X \subset \mathbb{R}$ y A contenido en X con $\mu(A)$ positivo. Si μ_A es absolutamente continua a la medida de Lebesgue normalizada en A, entonces μ es absolutamente continua a la de Lebesgue restricta a X.

El siguiente resultado se encuentra en Boyarsky y Gora (2012).

Proposición 2. *Sea $h : X \longrightarrow X$ una función medible, y $A \subset X$. Suponga que existe $h_A : A \longrightarrow A$ una aplicación de primer retorno. Si $\mu(X \backslash \bigcup_{i \geq 1} h^{-i}(A)) = 0$ y μ_A es ergódica entonces, μ es ergódica.*

4 Resultados

Para $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ se considera la familia $f_{a,b,\alpha,\beta}$ dada por:

$$f_{a,b,\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{(-x)^\alpha}, & \text{si } x < 0 \\ \\ a - \dfrac{a^{\beta+1}}{x^\beta}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

observe que $f_{a,b,\alpha,\beta}$ es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, y $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, ver Figura 1.

Sin pérdida de generalidad se denota $f = f_{a,b,\alpha,\beta}$ para cada $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. También se denota $f_+ = f|_{(0,+\infty)}$ y $f_- = f|_{(-\infty,0)}$ las cuales son funciones difeomorfismos en su imagen donde:

$$f_+((0, +\infty)) = (-\infty, a) \text{ y } f_-((-\infty, 0)) = (0, +\infty) \tag{1}$$

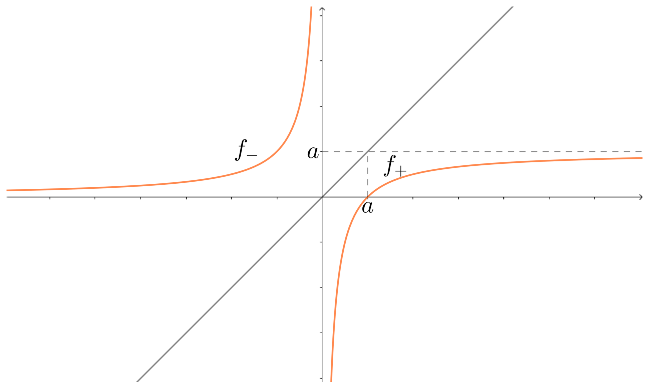

Figura 1: Gráfica $f_{a,b,\alpha,\beta}$
Fuente: Elaboración propia

Proposición 3. *Para $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, existe $m \in (0, a)$ tal que la familia $f_I : (0, a)\backslash\{m\} \longrightarrow (0, a)$ dada por:*

$$f_I(x) = \begin{cases} \dfrac{bx^{\alpha\beta}}{a^{\alpha}\left(a^{\beta} - x^{\beta}\right)^{\alpha}}, & si \;\; 0 < x < m \\ \\ a - \dfrac{a^{\alpha\beta+\beta+1}\left(a^{\beta} - x^{\beta}\right)^{\alpha\beta}}{b^{\beta}x^{\alpha\beta^2}}, & si \;\; m < x < a \end{cases} \tag{2}$$

es la transformación de primer retorno de f.

Demostración. Del hecho que $f(0) = a$ y por (1), existe $a_1 < 0$ tal que $f_-(a_1) = a$, es decir $f_-^{-1}(a) = a_1$. Luego por (1) nuevamente $f_+^{-1}(f_-^{-1}(a)) \in (0, a)$. Se toma $m = f_+^{-1}(f_-^{-1}(a))$.
Sea $x \in (0, m)$ entonces, $f(x) < 0$, como f es creciente $f(x) < f(m) = f\left(f_+^{-1}\left(f_-^{-1}(a)\right)\right)$ por lo tanto $f(x) < f_-^{-1}(a) < 0$, de esto, aplicando f nuevamente se tiene:

$$0 < f^2(x) < f\left(f_-^{-1}(a)\right) = a \tag{3}$$

para todo $x \in (0, m)$ f regresa por primera vez a $(0, a)$ en 2 iterados. Ahora se calcula $f^2(x)$.

$$f(x) = a - \frac{a^{\beta+1}}{x^{\beta}} < 0$$

$$f^2(x) = \frac{b}{\left(\dfrac{a^{\beta+1}}{x^{\beta}} - a\right)^{\alpha}} = \frac{bx^{\alpha\beta}}{a^{\alpha}\left(a^{\beta} - x^{\beta}\right)^{\alpha}}$$

Por 3,

$$f^2(x) = \frac{bx^{\alpha\beta}}{a^\alpha\left(a^\beta - x^\beta\right)^\alpha} \in (0, a)$$

Sea $x \in (m, a)$ entonces, $f(x) < 0$, como f es creciente $f\left(f_+^{-1}\left(f_-^{-1}(a)\right)\right) = f(m)$ y $f(m) < f(x)$ por lo tanto $f_-^{-1}(a) < f(x) < 0$, de esto, aplicando f nuevamente se tiene $0 < a = f\left(f_-^{-1}(a)\right) < f^2(x)$ y si se aplica otra vez f se obtiene $f(a) < f^3(x)$, y con la proposición 3 se obtiene:

$$0 = f(a) < f^3(x) < a \tag{4}$$

para todo $x \in (m, a)$ f regresa por primera vez a $(0, a)$ en 3 iterados. Ahora se calculará $f^3(x)$.

$$f(x) = a - \frac{a^{\beta+1}}{x^\beta} < 0$$

$$f^2(x) = \frac{b}{\left(\frac{a^{\beta+1}}{x^\beta} - a\right)^\alpha} = \frac{bx^{\alpha\beta}}{a^\alpha\left(a^\beta - x^\beta\right)^\alpha} > 0$$

Por 4,

$$f^3(x) = a - \frac{a^{\alpha\beta+\beta+1}\left(a^\beta - x^\beta\right)^{\alpha\beta}}{b^\beta x^{\alpha\beta^2}} \in (0, a)$$

■

El valor específico de m con respecto a los parámetros es:

$$m = f_+^{-1}\left(-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \left(\frac{a^{\beta+1+\frac{1}{\alpha}}}{a^{1+\frac{1}{\alpha}} + b^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \tag{5}$$

donde $-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = f_-^{-1}(a)$

Proposición 4. *Sean $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ y sea f_I la transformación de primer retorno, se tiene que $\lim_{x\to 0^+} f_I(x) = 0$, $\lim_{x\to m^-} f_I(x) = a$, $\lim_{x\to m^+} f_I(x) = 0$ y $\lim_{x\to a^-} f_I(x) = a$.*

Demostración. Recordar que $f_I(x) = \frac{bx^{\alpha\beta}}{a^\alpha\left(a^\beta - x^\beta\right)^\alpha}$ si $0 < x < m$

$$\lim_{x\to 0^+} f_I(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{bx^{\alpha\beta}}{a^\alpha\left(a^\beta - x^\beta\right)^\alpha} = 0$$

Ahora, por (5)

$$\lim_{x\to m^-}(a^\beta - x^\beta) = \frac{a^\beta b^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{1+\frac{1}{\alpha}} + b^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{6}$$

De (5) y (6) se tiene:

$$\lim_{x\to m^-} f_I(x) = \lim_{x\to m^-} \frac{bx^{\alpha\beta}}{a^{\alpha}\left(a^{\beta}-x^{\beta}\right)^{\alpha}} = \frac{b\left(\dfrac{a^{\beta+1+\frac{1}{\alpha}}}{a^{1+\frac{1}{\alpha}}+b^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}}{a^{\alpha}\left(\dfrac{a^{\beta}b^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{1+\frac{1}{\alpha}}+b^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}} = \frac{b\left(a^{\beta+1+\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}}{a^{\alpha}\left(a^{\beta}b^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}} = a$$

Recordar que $f_I(x) = a - \dfrac{a^{\alpha\beta+\beta+1}\left(a^{\beta}-x^{\beta}\right)^{\alpha\beta}}{b^{\beta}x^{\alpha\beta^2}}$ si $m < x < a$

Ahora, por (5)

$$\lim_{x\to m^+}(a^{\beta}-x^{\beta}) = \frac{a^{\beta}b^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{1+\frac{1}{\alpha}}+b^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{7}$$

De (5) y (7) se tiene:

$$\lim_{x\to m^+} f_I(x) = \lim_{x\to m^+}\left(a - \frac{a^{\alpha\beta+\beta+1}\left(a^{\beta}-x^{\beta}\right)^{\alpha\beta}}{b^{\beta}x^{\alpha\beta^2}}\right) = a - \frac{a^{\alpha\beta+\beta+1}\left(\dfrac{a^{\beta}b^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{1+\frac{1}{\alpha}}+b^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha\beta}}{b^{\beta}\left(\dfrac{a^{\beta+1+\frac{1}{\alpha}}}{a^{1+\frac{1}{\alpha}}+b^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha\beta}} = 0$$

Finalmente se tiene:

$$\lim_{x\to a^-} f_I(x) = \lim_{x\to a^-}\left(a - \frac{a^{\alpha\beta+\beta+1}\left(a^{\beta}-x^{\beta}\right)^{\alpha\beta}}{b^{\beta}x^{\alpha\beta^2}}\right) = a$$

■

De la proposición 4 f_I se puede extender continuamente a $[0, m]$ y al intervalo $[m, a]$.

Observación 2. $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. la derivada de f_I es de la forma:

$$f_I'(x) = \begin{cases} \dfrac{a^{\beta-\alpha}b\alpha\beta x^{\alpha\beta-1}}{\left(a^{\beta}-x^{\beta}\right)^{1+\alpha}}, & \text{si } \ 0 < x < m \\[2ex] \dfrac{a^{\alpha\beta+2\beta+1}\alpha\beta^2\left(a^{\beta}-x^{\beta}\right)^{\alpha\beta-1}}{b^{\beta}x^{\alpha\beta^2+1}}, & \text{si } \ m < x < a \end{cases} \tag{8}$$

y la derivada segunda es de la forma:

$$f_I''(x) = \begin{cases} \dfrac{a^{\beta-\alpha} b\alpha\beta x^{\alpha\beta-2}\left(a^\beta\alpha\beta - a^\beta + \beta x^\beta + x^\beta\right)}{(a^\beta - x^\beta)^{\alpha+2}}, & \text{si } 0 < x < m \\ -\dfrac{a^{\alpha\beta+2\beta+1}\alpha\beta^2\left(a^\beta\alpha\beta^2 + a^\beta - \beta x^\beta - x^\beta\right)\left(a^\beta - x^\beta\right)^{\alpha\beta-2}}{b^\beta x^{\alpha\beta^2+2}}, & \text{si } m < x < a \end{cases} \tag{9}$$

Por la observación 2 f_I es de clase C^2 en $(0, a) \setminus \{m\}$.

Observación 3. Por la observación 2 y con $\alpha\beta = 1$, se tiene que la derivada de f_I es de la forma:

$$f_I'(x) = \begin{cases} \dfrac{a^{\beta-\alpha} b}{(a^\beta - x^\beta)^{1+\alpha}}, & \text{si } 0 < x < m \\ \dfrac{a^{2\beta+2}\beta}{b^\beta x^{\beta+1}}, & \text{si } m < x < a \end{cases} \tag{10}$$

y la derivada segunda es de la forma:

$$f_I''(x) = \begin{cases} \dfrac{a^{\beta-\alpha} b\beta x^{\beta-1}(\alpha+1)}{(a^\beta - x^\beta)^{\alpha+2}}, & \text{si } 0 < x < m \\ -\dfrac{a^{2\beta+2}\beta(\beta+1)}{b^\beta x^{\beta+2}}, & \text{si } m < x < a \end{cases} \tag{11}$$

Note que si $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ y $\beta > 1$ entonces, $a^{\alpha+1} < \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Pues si $\beta > 1$ se tiene que $1 < \beta^{\frac{1}{\beta}}$, luego $a^{\frac{\beta+1}{\beta}} < \beta^{\frac{1}{\beta}}$, como $\alpha\beta = 1$ entonces $\dfrac{\beta+1}{\beta} = \alpha + 1$, teniendo que $a^{\alpha+1} < \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.
Resumiendo el análisis anterior.

Observación 4. Sean $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Si $\alpha\beta = 1$ y $\beta > 1$, entonces $a^{\alpha+1} < \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

Lema 1. *Sean $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Si $\alpha\beta = 1$, $\beta > 1$ y $a^{\alpha+1} < b < \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ entonces, existe $\lambda > 1$ tal que $f_I'(x) > \lambda$ para todo $x \in (0, a) \setminus \{m\}$ de hecho, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_I'(x) \geq \lambda$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f_I'(x) \geq \lambda$.*

Demostración. Por la observación 3, f_I' es una función creciente en $(0, m)$ y f_I' es una función decreciente en (m, a). Por otro lado note que $\lim\limits_{x\to 0^+} f_I'(x) = \dfrac{a^{\beta-\alpha} b}{(a^\beta)^{1+\alpha}} = \dfrac{b}{a^{\alpha+1}} > 1$ por hipótesis denote $\lambda_1 = \dfrac{b}{a^{\alpha+1}}$. Ahora,

$$\lim_{x\to a^-} f_I'(x) = \frac{a^{2\beta+2}\beta}{b^\beta a^{\beta+1}} = \frac{a^{\beta+1}\beta}{b^\beta}$$

por hipótesis $b < \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, esto implica que $\dfrac{a^{\beta+1}\beta}{b^{\beta}} > 1$. Aquí se denota $\lambda_2 = \dfrac{a^{\beta+1}\beta}{b^{\beta}}$. Considerando $\lambda = \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2\} > 1$. Como $f_I''(x) > 0$ en $(0, m)$ y $\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) \geq \lambda$, se tiene que $f_I'(x) \geq \lambda$ para todo $x \in (0, m)$. De igual forma, como $f_I''(x) > 0$ para todo $x \in (m, a)$ y $\lim_{x\to a^-} f_I'(x) \geq \lambda$ se sigue que $f_I'(x) \geq \lambda$ para todo $x \in (m, a)$ ∎

Corolario 1. *Sea $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ y f_I la transformación de primer retorno de f. Si $\alpha\beta = 1$, $\beta \geq 1$ y $b \in [a^{\alpha+1}, (\beta a^{\beta+1})^{\frac{1}{\beta}}]$, entonces $\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) \geq 1$ y $\lim_{x\to a^-} f_I'(x) \geq 1$. Además, $\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) = 1$ y $\lim_{x\to a^-} f_I'(x) = 1$, si, y solo si $\alpha = \beta = 1$ y $a^2 = b$.*

Demostración. Por la observación 3 se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a^{\beta-\alpha} b}{\left(a^{\beta} - x^{\beta}\right)^{1+\alpha}} = \frac{b}{a^{\alpha+1}} \tag{12}$$

como $b \geq a^{\alpha+1}$ se tiene que $\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) \geq 1$.
También, por la observación 3 se tiene

$$\lim_{x\to a^-} f_I'(x) = \lim_{x\to a^-} \frac{a^{2\beta+2}\beta}{b^{\beta} x^{\beta+1}} = \frac{a^{\beta+1}\beta}{b^{\beta}} \tag{13}$$

como $b \leq (\beta a^{\beta+1})^{\frac{1}{\beta}}$ se tiene que $\lim_{x\to a^-} f_I'(x) \geq 1$. Ahora si $\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) = 1$ y $\lim_{x\to a^-} f_I'(x) = 1$ se tiene por (12) y (13) que

$$\frac{b}{a^{\alpha+1}} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{a^{\beta+1}\beta}{b^{\beta}} = 1 \tag{14}$$

Con eso se tiene que $b = a^{\alpha+1}$ y $(\beta a^{\beta+1})^{\frac{1}{\beta}} = b$, $a^{\alpha+1} = (\beta a^{\beta+1})^{\frac{1}{\beta}}$, obteniendo por último que $\beta = 1$.
Como $\beta = 1$ entonces, $\alpha = 1$, de ahí se tiene por (12) y (13) que $\dfrac{b}{a^2} = 1$ y $\dfrac{a^2}{b} = 1$, teniendo que $a^2 = b$.
Ahora si $\alpha = \beta = 1$ y $a^2 = b$ por (12) y (13) se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^-} f_I'(x) = 1$$

∎

Demostración. [Teorema 1] Por la proposición 3 f tiene una aplicación de primer retorno f_I, donde $I = [0, a]$ y f_I tiene la expresión dada en (2). Se mostrará primero que f tiene extensión C^2 a los intervalos $[0, m]$ y $[m, a]$. de la proposición 4 f_I tiene una extensión continua a $[0, m]$ y $[m, a]$. En la demostración del lema 1 Se tiene una expresión explícita de la derivada de f_I y f_I'' entonces, $\lim_{x\to m^-} f_I'(x) = \dfrac{a^{\beta-\alpha} b}{(a^{\beta} - m^{\beta})^{\alpha+1}}$,

como $0 < m < a$ tal límite existe, también se verifica que $\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) = \dfrac{b}{a^{\alpha+1}}$. En conclusión f_I' se extiende continuamente a $[0, m]$
También por la mismas expresiones explícitas de la derivada de f_I y f_I''. Se tiene que $\lim_{x\to m^+} f_I'(x) = \dfrac{a^{2\beta+2}\beta}{b^\beta m^{\beta+1}}$, como $0 < m < a$ tal límite existe, también se verifica que $\lim_{x\to a^-} f_I'(x) = \dfrac{a^{\beta+1}\beta}{b^\beta}$. En conclusión f_I' se extiende continuamente a $[m, a]$
De (11) se puede verificar que $\lim_{x\to 0^+} f_I''(x) = 0$ y $\lim_{x\to m^-} f_I''(x) = \dfrac{a^{\beta-\alpha} b m^{\beta-1}(\alpha+1)}{(a^\beta - m^\beta)^{\alpha+2}}$, existe pues $0 < m < a$ en este caso f_I'' se puede extender de forma continua a $[0, m]$.
Del mismo (11) se verifica que $\lim_{x\to m^+} f_I''(x) = -\dfrac{a^{2\beta+2}\beta(\beta+1)}{b^\beta m^{\beta+2}}$ y $\lim_{x\to a^-} f_I''(x) = -\dfrac{a^\beta\beta(\beta+1)}{b^\beta}$, existe, pues $0 < m < a$ en este caso f_I'' se puede extender de forma continua a $[m, a]$.
De (1) note que $f_I([0, m)) = [0, a)$ y $f_I((m, a]) = (0, a]$. Y como $f_I'(x) > 0$, para todo $x \in [0, m) \cup (m, a)]$, en conclusión se ha probado que f_I es una transformación de Markov. Por el lema 1 f_I es expansiva. Entonces, por el teorema 4 (del Folklore). f_I admite una única medida de probabilidad invariante μ_I ergódica equivalente a la medida de Lebesgue. Ahora al aplicar la proposición 1,

$$\mu(B) = \sum_{k=2}^{3} \sum_{i=1}^{k-1} \mu_I(f^{-i}(B) \cap A_k), \tag{15}$$

Donde $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ es una medida invariante para $f_{a,b,\alpha,\beta}$. Por la observación 1 y la proposición 2 se sigue el resultado. ■

Demostración. [Teorema 2] Por la proposición 3 f tiene una aplicación de primer retorno f_I, donde $I = [0, a]$ y f_I tiene la expresión dada en (2). La idea es aplicar el teorema de Thaler (Teorema 5), para la aplicación de primer retorno f_I. Suponer que $b = a^{\alpha+1}$. De la observación 3 se puede verificar que f es 2 veces diferenciable en $[0, m)$ y $(m, a]$ donde la derivada en los extremos es la derivada lateral. De la proposición 4 se tiene que $\overline{f_I([o, m))} = [o, a]$ y $\overline{f_I((m, a])} = [o, a]$.
De las observaciones 3 y 4, y del hecho que $b = a^{\alpha+1}$ y $b < \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+} f_I'(x) = 1 \text{ y } \lim_{x\to a^-} f_I'(x) = \frac{a^{\beta+1}\beta}{b^\beta} > 1 \tag{16}$$

De la observación 3 se verifica que:

$$f_I''(x) > 0 \text{ si } x \in (0, m) \text{ y } f_I''(x) < 0 \text{ si } x \in (m, a) \tag{17}$$

De esto junto a (16) se tiene que el único punto fijo de f_I en $[0, a]$ además, la derivada es igual a 1, hasta aquí se verifica $T1$ y $T2$.
De (16) y (17) se sigue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda(\varepsilon) > 1$ tal que $f_I'(x) > \lambda(\varepsilon)$ para

todo $x \in [\varepsilon, m) = [0, m) \setminus (0, \varepsilon)$ y $f_I'(x) > \dfrac{a^{\beta+1}\beta}{b^{\beta}} > 1$ para todo $x \in (m, a]$. Esto verifica $T3$ y $T4$.

Para completar las hipótesis del teorema de Thaler falta probar que $\dfrac{f_I''}{(f_I')^2}$ es una función acotada en $[0, m) \cup (m, a]$.

De la observación 3 se tiene:

$$\frac{f_I''(x)}{\left(f_I'(x)\right)^2} = \begin{cases} \dfrac{\beta x^{\beta-1}\left(a^{\beta} - x^{\beta}\right)^{\alpha}(\alpha+1)}{a^{\beta-\alpha}b}, & \text{si } \; x \in [0, m) \\[2ex] -\dfrac{b^{\beta}x^{\beta}(\beta+1)}{a^{2\beta+2}\beta}, & \text{si } \; x \in (m, a] \end{cases}$$

lo que significa que efectivamente $\dfrac{f_I''}{(f_I')^2}$ es una función acotada. Así por el teorema 5 f_I preserva una única medida invariante $(\sigma - finita)$ infinita ergódica equivalente a la medida de Lebesgue.

Si $b = \left(\beta a^{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ la demostración es análoga. Solo que en este caso $x = a$ es el único punto fijo en $(m, a]$, además, $f_I'(a) = 1$ y $f_I'(x) \geqslant \alpha > 1$, $\forall x \in [0, m]$

Nuevamente se aplica el Teorema 5 (Thaler) en ambos casos, la medida definida en (15) es una medida invariante para f por la proposición 1.

De la observación 1 y proposición 2 se sigue el resultado. ■

Demostración. [Teorema 3] De la observación 3 y la proposición 4, se tiene que f_I es 2 veces derivable en $[0, m)$ y $(m, a]$. Además, $f_I([o, m)) = [o, a]$ y $f_I((m, a]) = [o, a]$. Por el corolario 1

$$\lim_{x \to 0^+} f_I'(x) = 1 = \lim_{x \to a^-} f_I'(x)$$

Note que $x = 0$ y $x = a$ son los únicos puntos fijos de f_I, de la observación 3 $f_I''(x) > 0$, para todo $x \in [0, m)$ y $f_I''(x) < 0$, para todo $x \in (m, a]$. Por tanto, $f_I'(x) > 1$ para todo $x \in (0, m) \cup (m, a)$ y para todo $\epsilon > 0$ resulta que existe $\lambda(\epsilon) > 1$ tal que $f_I'(x) > \lambda(\epsilon)$ si $x \in [\epsilon, m) \cup (m, a - \epsilon]$. Además, f_I' es creciente en $(0, \epsilon)$ y f_I' es decreciente en $(a - \epsilon, a)$.

Con esto f_I satisface las condiciones T_1 a T_3 del teorema de Thaler. Para aplicar dicho teorema basta probar que $\dfrac{f_I''}{(f_I')^2}$ es acotada.

De la observación 3 se tiene:

$$\frac{f_I''(x)}{\left(f_I'(x)\right)^2} = \begin{cases} -\dfrac{2(x-a)}{b}, & \text{si } \; x \in [0, m) \\[2ex] -\dfrac{2bx}{a^4}, & \text{si } \; x \in (m, a] \end{cases}$$

Esta función es acotada en $[0,m) \cup (m,a]$.
Por tanto, f_I satisface las hipótesis del teorema de Thaler. Así por el teorema 5 f_I preserva una única medida invariante infinita ergódica equivalente a la medida de Lebesgue. De la proposición 1, observación 1 y proposición 2 se sigue el resultado.

■

5 Conclusiones

Bajo las condiciones de los tres resultados principales y tomando en cuenta que la medida existente (en cada caso) es equivalente a la medida de Lebesgue, significa que la medida asocia un valor positivo a los intervalos. Por tanto, en cada uno de los teoremas la transformación es transitiva, esto es, existe un punto en $\mathbb{R}$ cuya órbita es densa en $\mathbb{R}$.

6 Bibliografía

Referencias

Aaronson, J. (1978). Ergodic theory for inner functions of the upper half plane. En *Annales de l'ihp probabilités et statistiques* (Vol. 14, pp. 233–253).

Adler, R., y Weiss, B. (1973). The ergodic infinite measure preserving transformation of Boole. *Israel Journal of Mathematics*, *16*(3), 263–278.

Bowen, R. (1979). Invariant measures forMarkov maps of the interval. *Communications in Mathematical Physics*, *69*(1), 1–14.

Boyarsky, A., y Gora, P. (2012). *Laws of chaos: invariant measures and dynamical systems in one dimension*. Springer Science & Business Media.

Leal, B., Mata, G., y Muñoz, S. (2018). Families of transitive maps on $\mathbb{R}$ with horizontal asymptotes. *Rev. Un. Mat. Argentina*, *59*(2).

Ruiz Leal, B., Tineo, A., y Lugo, A. (2022). Remark on Transitivity for piecewise increassing maps on $\mathbb{R}$. *Selecciones Matemáticas*, *9*(01), 145–149.

Schweiger, F. (1975a). Numbertheoretical endomorphisms with σ-finite invariant measure. *Israel Journal of Mathematics*, *21*(4), 308–318.

Schweiger, F. (1975b). Some remarks on ergodicity and invariant measures. *Michigan Mathematical Journal*, *22*(2), 181–187.

Thaler, M. (1980). Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points. *Israel Journal of Mathematics*, *37*(4), 303–314.

Thaler, M. (1983). Transformations on [0, 1] with infinite invariant measures. *Israel Journal of Mathematics*, *46*(1), 67–96.

Vera, D., y Leal, B. (2022). Transitividad de Familias en la recta real con asíntotas horizontales y asíntota vertical. *Enviado a publicación*.

Zweimüller, R. (1998). Ergodic structure and invariant densities of non-Markovian interval maps with indifferent fixed points. *Nonlinearity*, *11*(5), 1263.

Zweimüller, R. (2000). Ergodic properties of infinite measure-preserving interval maps with indifferent fixed points. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, *20*(5), 1519–1549.