Matemática: Una publicación de FCNM – ESPOL
2018, Vol.16, No.2 **Publicado:2018-10-02**

CONSTRUCCIÓN DE M-ONDÍCULAS EN R CON SOPORTE COMPACTO PARTE I

(CONSTRUCTION OF M-ONDICLES IN R WITH COMPACT SUPPORT PART I)

Yenny Rangel[1], Miguel Vivas[2]

Resumen. *En este trabajo hemos desarrollado una generalización de la construcción de 2-ond´ıculas hecha por Hernández y Weiss ver [HW] para el caso de M-ondículas con M> 1.*
Palabras claves: Ondículas, Análisis multirresolución, Transformada de Fourier.

Abstract. *In this work we have developed a generalization of the construction of 2-wavelets made by Hernandez and Weiss see [HW] for the case of M-wavelets with M> 1.*
Keywords: Wavelets, Multiresolution Analysis, Fourier Transform.

1. INTRODUCCIÓN

Los algoritmos desarrollados por Burt y Adelson en 1983 descomponen una señal en su tendencia y sus detalles utilizando un par de filtros que capturan distintas propiedades de la señal (véase [BA]). En 1987 Y. Meyer y S. Mallat describieron los algoritmos anteriormente mencionados en términos de una estructura llamada Análisis Multirresolución en donde la descomposición en tendencia y detalles se manifestaba en la invariancia por dilataciones diádicas de la nueva estructura (véase [Ma]). Conviene en ocasiones descomponer una señal en su tendencia y en "varios detalles", cada uno de los cuales capture distintas propiedades de la señal. En términos de Análisis Multirresolución esto requiere desarrollar una construcción que sea invariante mediante dilataciones por un número entero positivo M > 1, lo que se hará en la sección 2. En la sección 3 se muestra como esta estructura da lugar a una colección de M −1 funciones, llamadas **ondículas**, que capturan los detalles de la señal.

[1]*Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Sede Quito.; (E-mail: ycrangel@puce.edu.ec).*
[2]*Pontificia Universidad Católica del Ecuador (PUCE), Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Sede Quito. (Email: mjvivas@puce.edu.ec)*

El concepto de ondículas con dilatación $M\ (M > 1, M \in Z)$ puede definirse independientemente del concepto de Análisis Multirresolución. Una colección $\Phi = \{\psi(1), \dots, \psi(L)\}$ es una M-ondículas en $L^2(R)$ si el conjunto

$$\left\{M^{\frac{j}{2}}\psi^{(s)}(M^j x - k): k \in \boldsymbol{Z}, j \in \boldsymbol{Z}, s = 1,2, \dots, L\right\}$$

es una base ortonormal de $L^2(R)$. No es difícil comprobar que la colección

(1.1)
$$\widehat{(\psi^{(s)})}(\omega) = \chi \pm [s\pi, (s+1)\pi]^{(\omega)}, s = 1,2, \dots, M - 1$$

es una M-ondículas. En todo este trabajo definimos la transformada de Fourier de f como

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\boldsymbol{R}} f(x)\, e^{-ix\omega} dx,$$

de manera que el teorema de Plancherel se escribe

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2$$

Las funciones dadas en (1.1) tienen decaimiento como 1 x en ∞ y los coeficientes de los filtros con ellas asociadas tienen una serie de Fourier cuyos coeficientes decaen como $\frac{1}{x}$, cuando $k \to \pm\infty$. Desde el punto de vista computacional es aconsejable usar filtros que sean polinomios trigonom´etricos. Estos dan lugar a funciones de escala y M-ondículas de soporte compacto. Es importante destacar que las secciones 1, 2, 3 y 4 son una generalización de los resultados que aparecen en [HW] para el caso M = 2.

2. ANÁLISIS MULTIRRESOLUCIÓN DE RANGO M SEA M

Un número entero positivo y M ≥ 2.

Un análisis de multirresolución de rango M consiste en una sucesión de subespacios cerrados lineales V_j con $j \in \boldsymbol{Z}$, de $L^2(\boldsymbol{R})$ satisfaciendo:

1. $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in Z$
2. $f(x) \in V_j$ sí y solo si $f(Mx) \in V_{j+1} \quad \forall j \in Z$
3. $\cap_{j\in \boldsymbol{Z}} V_j = \{0\}$
4. $\cap_{j\in \boldsymbol{Z}} V_j = L^2(\boldsymbol{R})$

5. Existe una función $\varphi \in V_0$ tal que $\{\varphi(x-k): k \in \boldsymbol{Z}\}$ es una base ortonormal para V_0.

La función φ cuya existencia es asegurada en (5) se llama **función de escala** del análisis multirresolución dado.

Algunas veces se rebaja la condición (5) asumiendo que $\{\varphi(x-k): k \in \boldsymbol{Z}\}$ es una base de Riesz para V_0. Esto es, para cada $f \in V_0$ existe una única sucesión $\{\alpha_k\}_{k\in Z} \in l^2(\boldsymbol{Z})$ tal que

$$f(x) = \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \alpha_k \varphi(x-k)$$

con convergencia en $L^2(\boldsymbol{R})$ y

$$A\sum_{k\in \boldsymbol{Z}} |\alpha_k|^2 \le \left\| \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \alpha_k \varphi(x-k) \right\|_2^2 \le B \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} |\alpha_k|^2$$

Con $0 < A \le B < \infty$ constantes independientes de $f \in V_0$.

Si este es el caso decimos que tenemos un análisis de multirresolución de rango M con una base de Riesz. Observe que (5) implica que $\{\varphi(x-k): k \in \boldsymbol{Z}\}$ es una base de Riesz para V_0 con $A = B = 1$.

Sea $\varphi_{j,k}(x) = M^{\frac{j}{2}} \varphi(M^j x - k)$; como $\varphi_{0,k}(x) = \varphi(x-k)$; vemos que $\varphi_{0,k} \in V_0, \forall k \in \mathbf{Z}$ por (5). Por otro lado, si $j \in \boldsymbol{Z}$, la condición (2) implica que $\{\varphi_{j,k} : k \in \boldsymbol{Z}\}$ es una base ortonormal para V_j.

Estas propiedades de un análisis de multirresolución de rango M no son independientes, como también sucede en el caso M=2.

Teorema 2.1. *Las condiciones (1), (2) y (5) implican (3), incluso cuando (5) se sustituye por la existencia de una base de Riesz.*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe una función no nula $f \in \cap_{j\in \boldsymbol{Z}} V_j$; podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\|f\|_2^2 = 1$. En particular $f \in V_{-j}$ para cada $j \in \boldsymbol{Z}$; por lo tanto, si escribimos

(2.1) $$f_j(x) = M^{\frac{j}{2}} f(M^j x)$$

debemos tener $f_j \in V_0$ por (2). Por otro lado, haciendo un cambio de variable se obtiene que $\|f_j\|_2 = \|f\|_2 = 1$. Asumiendo que $\{\varphi_{j,k} : k \in \boldsymbol{Z}\}$ es una base de Riesz podemos escribir

(2.2)
$$f_j(x) = \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \alpha_k^j \varphi(x-k)$$

con convergencia en $L^2(\boldsymbol{R})$ y

(2.3)
$$A\sum_{k\in \boldsymbol{Z}} |\alpha_k^j|^2 \le \|f_j\|_2^2 = 1$$

De (2.1) deducimos

(2.4) $$\widehat{f_j}(\omega) = M^{-\frac{j}{2}} \hat{f}(M^{-j}\omega)$$

haciendo un sencillo cambio de variable.

Análogamente, de (2.2) deducimos

(2.5)
$$\widehat{f_j}(\omega) = \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \alpha_k^j e^{-ikw} \hat{\varphi}(\omega).$$

Por lo tanto, de (2.4) y (2.5) se tiene que:

$$M^{-\frac{j}{2}} \hat{f}(M^{-j}\omega) = \widehat{f_j}(\omega) = \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \alpha_k^j e^{-ikw} \hat{\varphi}(\omega).$$
$$= m_j(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$$

donde

$$m_j(\omega) = \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \alpha_k^j e^{-ikw}$$

es una función 2π-periódica. Además $m_j \in L^2(\boldsymbol{T})$ por (2.3) y tiene norma $\le \sqrt{\frac{2\pi}{A}}$:

$$\|m_j(\omega)\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |m_j(\omega)|^2 d\omega$$
$$= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \alpha_k^j e^{-ikw} \right|^2 d\omega$$
$$\le \int_0^{2\pi} \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} |\alpha_k^j|^2 d\omega \le \int_0^{2\pi} \frac{1}{A} d\omega$$
$$= \frac{2\pi}{A}.$$

Así se tiene que

$$\hat{f}(\omega) = M^{\frac{j}{2}} m_j(M^j\omega)\hat{\varphi}(M^j\omega) \text{ para } j \in \boldsymbol{Z}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schawarz

$$\int_{2\pi}^{4\pi}|\hat{f}(\omega)|\,d\omega \leq M^{\frac{j}{2}}\left(\int_{M^j2\pi}^{M^j4\pi}|\hat{\varphi}(\mu)|^2M^{-j}d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{M^j2\pi}^{M^j4\pi}|m_j(\mu)|^2M^{-j}d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= M^{-\frac{j}{2}}\left(\int_{M^j2\pi}^{M^j4\pi}|\hat{\varphi}(\mu)|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{M^j2\pi}^{M^j4\pi}|m_j(\mu)|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left(\int_{M^j2\pi}^{\infty}|\hat{\varphi}(\mu)|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{M^j}\int_{M^j2\pi}^{M^j4\pi}|m_j(\mu)|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

Descomponiendo el intervalo $[M^j2\pi, M^j4\pi]$ en M^j subintervalos se tiene:

$$\int_{2\pi}^{4\pi}|\hat{f}(\omega)|\,d\omega \leq \left(\int_{M^j2\pi}^{\infty}|\hat{\varphi}(\mu)|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{M^j}\sum_{i=0}^{M^j-1}\frac{2\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\int_{M^j2\pi}^{\infty}|\hat{\varphi}(\mu)|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Haciendo $j \to \infty$ obtenemos que

$$\int_{2\pi}^{4\pi}|\hat{f}(\omega)|\,d\omega = 0$$

2

En consecuencia $\hat{f}(\omega) = 0$ en casi todo punto de $[2\pi, 4\pi]$. Podemos aplicar el mismo argumento a $M^{\frac{1}{2}}\hat{f}(M^l\omega)$ con $l \in \boldsymbol{Z}$ para obtener $\hat{f}(\omega) = 0$ en casi todo punto de $M^l[2\pi, 4\pi]$ con $l \in \boldsymbol{Z}$. Por lo tanto, $\hat{f}(\omega) = 0$ en casi todo punto de $(0, \infty)$. Si aplicamos este argumento con el intervalo $[-4\pi, -2\pi]$ en lugar de $[2\pi, 4\pi]$ obtenemos $\hat{f}(\omega) = 0$ en casi todo punto de $(-\infty, 0)$ con lo cual se tiene que $\hat{f}(\omega) = 0$ en casi todo punto de **R**. Esta contradicción prueba el resultado.

Teorema 2.2. *Sea $\{V_j : j \in \boldsymbol{Z}\}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\boldsymbol{R})$ satisfaciendo (1), (2) y (5); asuma que la función de escala φ de la condición (5) es tal que $|\hat{\varphi}|$ es continua en cero. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

$$(i)\ \hat{\varphi}(0) \neq 0 \qquad (ii)\ \overline{\cup_{j\in \boldsymbol{Z}} V_j} = L^2(\boldsymbol{R});$$

en cualquiera de estos dos casos $|\hat{\varphi}(0)| = 1$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Tenemos, por hipótesis, que $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ y $|\hat{\varphi}|$ es continua en cero; por lo tanto $|\hat{\varphi}(\omega)| \neq 0$ sobre $(-\mu; \mu)$ para algún $\mu > 0$.

El espacio $W = \overline{\cup_{j\in \boldsymbol{Z}} V_j}$ es invariante bajo traslaciones. En efecto, para probar esto primero mostraremos que W es invariante bajo traslaciones $\tau M^l m$ con $l, m \in \mathbf{Z}$ y $M \geq 2, M \in$ **N.** Fijo.

Sea $f \in W$; dado $M \geq 2$ existe $j_0 \in \boldsymbol{Z}$ y $h \in V_{j0}$ tal que $\|f - h\| < \epsilon$. De (1) deducimos que $h \in V_j$ para todo $j \geq j_0$ y usando (2) y (5) podemos escribir

$$h(x) = \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} c_k^j\, \varphi(M^j x - k)$$

con convergencia en $L^2(\boldsymbol{R})$. Por lo tanto

$$\tau M^{-l}{}_m h(x) = h(x - M^{-l}{}_m)$$
$$= \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} c_k^j\, \varphi(M^j(x - M^{-l}{}_m) - k);$$

Si $j \geq l$, $\varphi(M^j(x - M^{-l}{}_m) - k) = \varphi(M^j x - M^{j-l}{}_m - k)$ es un elemento de V_j puesto que $M^{j-l}{}_m \in \boldsymbol{Z}$. Por lo tanto $\tau M^{-l}{}_m h \in V_j$ si $j > l$, es decir que $\tau M^{-l}{}_m h \in W$. si

Puesto que $\|\tau M^{-l}{}_m f - \tau M^{-l}{}_m h\|_2 = \|f - h\|_2 < \epsilon$, con ϵ arbitrariamente pequeño, podemos concluir que W es invariante bajo traslaciones del tipo $\tau M^{-l}{}_m$.

Ahora para un x general, podemos encontrar m y l, ambos enteros tal que $M^{-l}{}_m$ está arbitrariamente cercano a x, debido a la densidad del conjunto $\{M^{-l}{}_m : l \in \boldsymbol{Z}, m \in \boldsymbol{Z}\}$ en $\boldsymbol{R}$; por lo tanto

$$\|\tau M^{-l}{}_m f - \tau_x f\|_2 \leq \|\tau M^{-l}{}_m f - \tau M^{-l}{}_m h\|_2$$
$$+\|\tau M^{-l}{}_m h - \tau_x h\|_2 + \|\tau_x h - \tau_x f\|_2$$
$$< \epsilon + \int_{\boldsymbol{R}} |h(y - M^{-l}{}_m) - h(y - x)^2|dy$$
$$+\|h - f\|_2$$
$$< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.$$

De aquí se deduce que W es invariante bajo cualquier traslación τ_x.

Supongamos que existe $g \in W^{\perp}$; entonces g es ortogonal a todo $f \in W$, y como W es invariante bajo traslaciones tenemos que

$$0 = \int_{\boldsymbol{R}} f(x + t)\overline{g(t)}\,dt \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}\ y\ \forall f \in \boldsymbol{W}$$

Puesto que $\widehat{\tau_{-x} f}(\omega) = e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)$, por la fórmula de Plancherel se tiene que

$$0 = \int_{\boldsymbol{R}} e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}$$

Como $\hat{f}\hat{g} \epsilon L^1(\boldsymbol{R})$ se deduce que $\hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} = 0$ en casi todo punto $\omega \in \boldsymbol{R}$. En particular sea $f(x) = M^j\varphi(M^j x)$ de manera que $f \in V_j \subset W$ y $\hat{f}(\omega) = \varphi(M^j\omega)$; por lo tanto $\varphi(M^j\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} = 0$ en casi todo punto $\omega \in \boldsymbol{R}$. Como $|\varphi(M^j\omega)| \neq 0$ para $\omega\ \epsilon\ (-M^j\mu,\ M^j\mu)$, se tiene que $\hat{g}(\omega) = 0$ en casi todo punto ω satisfaciendo $|\omega| < M^j\mu$. Haciendo $j \to \infty$ se tiene que $\hat{g} = 0$ en casi todo punto $\omega \in \boldsymbol{R}$. Así, $W^{\perp} = \{0\}$, en consecuencia $\overline{\bigcup_{j\in \boldsymbol{Z}} V_j} = L^2(\boldsymbol{R})$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $f \in L^2(\boldsymbol{R})$ tal que $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$; entonces $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2 = \frac{1}{\pi}$. Si P_j es la proyección ortogonal sobre V_j entonces tenemos que $\|f - P_j f\| \to 0$ cuando j → ∞ puesto que $W = \overline{\bigcup_{j\in \boldsymbol{Z}} V_j} = L^2(\boldsymbol{R})$. De este modo $\|P_j f\|_2 \to \|f\|_2$ cuando j →∞. Por lo tanto, si

$$\varphi_{j,k}(x) = M^{\frac{j}{2}}\varphi(M^j x - k)$$

como $\{\varphi_{j,k} : k \in \boldsymbol{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j tenemos que

$$\|P_j f\|_2^2 = \left\| \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} < f, \varphi_{j,k} > \varphi_{j,k} \right\|_2^2 \to \frac{1}{\pi}$$

cuando j →∞

Aplicando Plancherel y el hecho de que $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|P_j f\|_2^2 &= \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} |< f, \varphi_{j,k} >|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}} |< \hat{f}, \widehat{\varphi_{j,k}} >|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \left|\int_{\boldsymbol{R}} \hat{f}(\omega)\overline{\varphi_{j,-k}}(\omega)d\omega\right|^2 \\ &= M^j \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-M^{-j}}^{M^{-j}} \hat{\varphi}(\mu)e^{-ik\mu}d\mu\right|^2.\end{aligned}$$

Para j grande tenemos que $[-M^{-j}, M^{-j}] \subset [-\pi,\pi]$ y esta última expresión es M^j-veces la suma del cuadrado del valor absoluto de los coeficientes de Fourier de la función $\chi_{[-M^{-j},M^{-j}]}\hat{\varphi}$; de este modo por la fórmula de Plancherel tenemos que

$$\begin{aligned}\|P_j f\|_2^2 &= \frac{M^j}{2\pi}\int_{-M^{-j}}^{M^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi M^{-j}}\int_{-M^{-j}}^{M^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu\end{aligned}$$

Luego aplicando el teorema de diferenciación de Lebesgue tenemos que

$$\frac{1}{2\pi M^{-j}}\int_{-M^{-j}}^{M^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \to \frac{1}{\pi}|\hat{\varphi}(0)|^2 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Como $\|P_j f\|_2^2 \to \frac{1}{\pi}$, por la unicidad del límite podemos concluir que $|\hat{\varphi}(0)|^2 = 1$; por lo tantob $\hat{\varphi}(0) \neq 0$.

Finalizamos esta sección enunciando una proposición cuya demostración puede verse en [HW].

Proposición 2.1. *Si $g \in L^2(\boldsymbol{R})$, entonces $\{g(x - k) : k \in \boldsymbol{Z}\}$ es un sistema ortonormal de $L^2(\boldsymbol{R})$ si y solo si*

$$\sum_{k\in \boldsymbol{Z}} |\hat{g}(\mu + 2k\pi)|^2 = 1$$

para c.t.p $\mu \in R$.

3. CONSTRUCCION DE M-OND´ICULAS A PARTIR DE UN AMR

En esta sección haremos la construcción teórica de ondículas ortonormales. Sea W_0 el complemento ortogonal de V_0 en V_1; es decir; $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Si $W_j = \{f(M^j x) : f \in W_0\}$ se tiene

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \text{para cada } j \in \boldsymbol{Z}.$$

Ya que $V_j \to \{0\}$ cuando j →−∞ vemos que para todo $j \in \boldsymbol{Z}$ se tiene:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = \bigoplus_{l=-\infty}^{j} W_l.$$

Ya que $V_j \to L^2(\boldsymbol{R})$ cuando j → +∞ tenemos que

$$L^2(\boldsymbol{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j. \tag{3.1}$$

Bastaría encontrar una base de W_0 para tener una base de $L^2(\boldsymbol{R})$. Esta base debería ser de la forma $\{\psi^1(x-k), \dots, \psi^L(x-k) : k \in Z\}$ para tener una base de M-ondículas en $L^2(\boldsymbol{R})$. Mostraremos que esto puede hacerse cuando $L = M - 1$.

Para ello consideremos $V_0 = W_{-1} \oplus V_{-1}$ y observemos que $\varphi\left(\frac{x}{M}\right) \in V_{-1} \subset V_0$ por (2); luego por (5) podemos expresar esta función en términos de la base $\{\varphi(x-k) : k \in \boldsymbol{Z}\}$ para obtener

$$\varphi\left(\frac{x}{M}\right) = \sum_{k\in \boldsymbol{Z}} a_{0,k}\varphi(x-k),$$

donde

$$a_{0,k} = \int_{\boldsymbol{R}} \varphi\left(\frac{x}{M}\right)\overline{\varphi(x-k)}\,dx,$$

Llamaremos sucesión de escala a la sucesión $\{a_{0,k} : k \in \mathbf{Z}\}$. La convergencia de (3.2) es en $L^2(\boldsymbol{R})$ y $\sum_{k\in \boldsymbol{Z}} |a_{0,k}|^2 < \infty$. Tomando transformada de Fourier obtenemos:

$$M\hat{\varphi}(M\omega) = \int_{\boldsymbol{R}} \sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}} a_{0,k}\varphi(x-k)e^{-ix\omega}dx$$
$$\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}} a_{0,k} \int_{\boldsymbol{R}} \varphi(y)e^{-i(y+k)\omega}\,dy$$
$$\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}} a_{0,k}\,\varphi(\omega)e^{-ik\omega}.$$

Escribimos

(3.3) $\varphi(M\omega) = m_0(e^{i\omega})\hat{\varphi}(\omega),$

donde

$$m_0(e^{i\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}} a_{0,k}e^{-ik\omega}$$

es una función 2π-periódica en $L^2(\boldsymbol{T}) = L^2([-\pi,\pi])$. La función $m_0(e^{i\omega})$ se llama filtro de paso bajo asociado con la función de escala φ.
Una propiedad importante del filtro de paso bajo es la siguiente:

Lema 3.1. *El filtro de paso bajo asociado a la función de escala φ cumple la siguiente propiedad:*

(3.4)

$$\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}}^{M-1}\left|m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2\pi m}{M}\right)}\right)\right|^2 = 1$$

$$c.t.p \quad \omega \in \boldsymbol{R}$$

Demostración. Por la proposición (2.1) tenemos que:

$$\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}} |\varphi(M\omega+2k\pi)|^2 = 1.$$

Escribiendo $k = lM + m, l \in \boldsymbol{Z}, m = 0,\dots,M-1$ se tiene:

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}}\left|\varphi(M(\omega+\frac{2(lM+m)\pi}{M}))\right|^2 = 1.$$

Usando (3.3) podemos escribir:

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l\,\in\,\boldsymbol{Z}}\left|m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2(lM+m)\pi}{M}\right)}\right)\right|^2\left|\varphi\left((\omega+\frac{2(lM+m)\pi}{M})\right)\right|^2 = 1.$$

Como $m_0(e^{i\omega})$ es una función 2π-periódica tenemos que

$$\sum_{m=0}^{M-1}\left|m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2m\pi}{M}\right)}\right)\right|^2\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\omega+\frac{2m\pi}{M}+2l\pi\right)\right|^2 = 1.$$

Por lo tanto, de nuevo por la proposición 2.1,

$$\sum_{m=0}^{M-1}\left|m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2m\pi}{M}\right)}\right)\right|^2 = 1$$

Continuamos con la construcción de las M-ondículas. Sean $m_0(e^{i\omega})$,..., $m_{M-1}(e^{i\omega})$ funciones 2π-periodicas en $L^2(\boldsymbol{T})$ que escribimos de la forma

$$m_1(e^{i\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}} a_{1,k}\,e^{-ik\omega}$$
$$\vdots$$
$$m_{M-1}(e^{i\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}} a_{M-1,k}\,e^{-ik\omega};$$

los coeficientes $\{a_{s,k}\}$ con s = 1, 2,...,M −1 le llamaremos **coeficientes de ondículas**.
Definimos la matriz $M(e^{i\omega})$ como

$$\begin{bmatrix} m_0(e^{i\omega}) & m_0(\zeta e^{i\omega}) & \cdots & m_0(\zeta^{M-1}e^{i\omega}) \\ m_1(e^{i\omega}) & m_1(\zeta e^{i\omega}) & \cdots & m_1(\zeta^{M-1}e^{i\omega}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M-1}(e^{i\omega}) & m_{M-1}(\zeta e^{i\omega}) & \cdots & m_{M-1}(\zeta^{M-1}e^{i\omega}) \end{bmatrix}$$

donde $\zeta = e^{\frac{i2\pi}{M}}$ M es una raíz M-ésima de la unidad.
Definición 3.1. *Decimos que la matriz M es unitaria si*

$$M(z)M^t(z^{-1}) = I \quad cuando \quad z = e^{i\omega}.$$

Para s = 1,2,...,M − 1 definimos ψ^s mediante $\widehat{\psi^s}(M\omega) = m_s(e^{i\omega})\hat{\varphi}(\omega)$.Queremos demostrar que si $M(e^{i\omega})$ es una matriz unitaria entonces $\{\psi^s(x-k) : k \in \boldsymbol{Z}, s = 1,2,\dots,M-1\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\boldsymbol{R})$. Antes de probar este resultado encontraremos condiciones equivalentes a que la matriz $M(e^{i\omega})$ sea unitaria, que involucran los coeficientes de escala y de ondículas.

Proposición 3.1. *La matriz $M(e^{i\omega})$ es unitaria si y solo si*

$$\sum_{k\,\in\,\boldsymbol{Z}} a_{s,k}\,\overline{a_{s',k+Ml}} = M\delta_{s,s'}\,\delta_{0,l}$$

con $l \in \boldsymbol{Z}, \qquad s, s' \in \{0,1,\dots,M-1\}$.

Demostración. Es fácil comprobar que $M(e^{i\omega})$ es unitaria si y solo si

(3.5)
$$\sum_{m=0}^{M-1} m_s\left(e^{i\left(\omega+\frac{2\pi m}{M}\right)}\right)\overline{m_{s'}\left(e^{i\left(\omega+\frac{2\pi m}{M}\right)}\right)} = \delta_{s,s'}$$
donde $s, s' \in \{0,1,\dots,M-1\}$.

De la definición de m_s se deduce que si $s, s' \in \{0, 1, \dots, M-1\}$.

$$\delta_{s,s'} = \sum_{m=0}^{M-1}\left(\frac{1}{M}\sum_{k\in Z} a_{s,k}\, e^{-ik\left(\omega+\frac{2\pi m}{M}\right)}\right)\left(\frac{1}{M}\sum_{n\in Z}\overline{a_{s',n}}\, e^{in\left(\omega+\frac{2\pi m}{M}\right)}\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1}\left(\frac{1}{M^2}\sum_{k\in Z}\sum_{n\in Z} a_{s,k}\overline{a_{s',n}}\, e^{-i(k-n)\left(\omega+\frac{2\pi m}{M}\right)}\right)$$

Separamos los términos en los que $k-n$ sea múltiplo de *M* de aquellos en los que no lo sea y obtenemos:

$$\delta_{s,s'} = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{1}{M^2}\left[\sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} a_{s,k}\overline{a_{s',k+lM+r}}\, e^{-ilM\left(\omega+\frac{2\pi m}{M}\right)}\right]$$
$$+\sum_{r=1}^{M-1}\sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} a_{s,k}\overline{a_{s',k+lM+r}}\, e^{-i(lM+r)\left(\omega+\frac{2\pi m}{M}\right)}.$$

Como $\zeta = e^{-i\frac{2\pi m}{M}}$ es una raíz M-ésima de la unidad no nula, $\sum_{m=0}^{M-1}\zeta^{mr} = 0$ cuando *r*= 1,2,...,*M−1*. Esto implica que el segundo sumando de la expresión anterior es nulo y se tiene

$$\delta_{s,s'} = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{1}{M^2}\sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} a_{s,k}\overline{a_{s',k+lM}}\, e^{-ilM\omega},$$

Que es equivalente a

$$\delta_{s,s'} = \frac{1}{M}\sum_{l\in Z}\left(\sum_{k\in Z} a_{s,k}\overline{a_{s',k+lM}}\right)e^{-ilM\omega}$$

Igualando coeficientes se deduce el resultado enunciado.

Lema 3.2. *Si φ es una función de escala para un AMR, $\{V_j\}_{j\in Z}$, y las m_j son funciones 2π-periodicas entonces,*

$$W_0 = \left\{f \in L^2(\boldsymbol{R}) : \hat{f}(M\omega) = \sum_{j=1}^{M-1} s_j(M\omega)m_j(e^{i\omega})\,\hat{\varphi}(\omega)\right\}$$

donde $s_j \in L^2(\boldsymbol{T})$ son funciones 2π-periodicas.

Demostración.

$$W_{-1} = V_0 \ominus V_{-1} \Leftrightarrow V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}.$$

Si $f \in V_0$

$$f(x) = \sum_{k\in Z} c_k\,\varphi(x-k) \quad \text{con} \quad \sum_{k\in Z}|c_k|^2 < \infty.$$

Entonces

$$\hat{f}(\omega) = \left(\sum_{k\in Z} c_k e^{-ik\omega}\right)\hat{\varphi}(\omega);$$

por tanto

(3.6) $V_0 = \{f \in L^2(\boldsymbol{R}) : \hat{f}(\omega) = l(\omega)\hat{\varphi}(\omega)\}$, con, $l \in L^2(\boldsymbol{T})$ 2π-periódica.

Si $f \in V_{-1}$ entonces $f(M_x) \in V_0$; así se tiene que

$$\frac{1}{M}\hat{f}\left(\frac{\omega}{M}\right) = l(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \Leftrightarrow \hat{f}(\omega)$$
$$= s(M\omega)\hat{\varphi}(M\omega) \Leftrightarrow \hat{f}(\omega)$$
$$= s(M\omega)m_0(e^{i\omega})\hat{\varphi}(\omega);$$

por tanto
(3.7)

$$V_{-1} = \{f \in L^2(\boldsymbol{R}) : \hat{f}(\omega) = s(M\omega)m_0(e^{i\omega})\hat{\varphi}(\omega)\},$$

con $s \in L^2(\boldsymbol{T})$ 2π-periódica

Para $f \in V_0$, usando el teorema de Plancherel se tiene que

$$\|f\|^2_{L^2(\boldsymbol{R})} = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|^2_{L^2(\boldsymbol{R})}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\boldsymbol{R}}|l(\omega)\hat{\varphi}(\omega)|^2\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in Z}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}|l(\omega)|^2|\hat{\varphi}(\omega)|^2\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in Z}\int_0^{2\pi}|l(\omega)|^2|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\|l\|_{L^2(\boldsymbol{T})}$$

Por polarización,
(3.8)

$$< f, g > L^2(R) = \frac{1}{2\pi} < l_f, l_g > L^2(\boldsymbol{T}),\ f, g \in V_0.$$

Si $f \in V_0$ y $f \perp V_{-1}$ por (3.7) y (3.8) se tiene $< l_f, s(Mx)m_0(e^{i\omega}) >= 0\ \forall s \in L^2(\boldsymbol{T})$ 2π-periódica; es decir,

$$\int_0^{2\pi} l_f(\omega)s(M\omega)\,m_0(e^{i\omega})\,d\omega = 0 \tag{3. 9}$$

para toda $s \in L^2(\boldsymbol{T})$ 2π-periódica.
Entonces

$$0 = \sum_{k=0}^{M-1}\int_{\frac{2K\pi}{M}}^{\frac{2(k+1)\pi}{M}} l_f(\omega)s(M\omega)\,m_0(e^{i\omega})\,d\omega$$
$$= \sum_{k=0}^{M-1}\int_0^{\frac{2\pi}{M}} l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)s\left(M(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)d\omega$$
$$= \int_0^{\frac{2\pi}{M}} s(M\omega)\left\{\sum_{k=0}^{M-1} l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)\right\}d\omega$$

$\forall s \in L^2(\boldsymbol{T})$. Observe que $s(M\omega)$ es $\frac{2\pi}{M}$ -periódica y por tanto la función $\sum_{k=0}^{M-1} l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right) m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)$ es ortogonal a todas las funciones $\frac{2\pi}{M}$ -periodicas por (3). Así $\sum_{k=0}^{M-1} l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right) m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)=0$, c.t. ω ∈ T.

Ya que para casi todo ω los vectores $\{\left(m_j\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)\right)_{k=0}^{M-1}, j=1,\ldots,M-1\}$ son un sistema ortonormal y todos ellos son ortogonales al vector $\left(m_0\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)\right)_{k=0}^{M-1}$ r se tiene que (3.9)

$$\left(l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)\right)_{k=0}^{M-1}, \left(m_j\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)\right)_{k=0}^{M-1},$$

en casi todo ω ∈ **T**, para $\lambda_j(\omega)$ apropiado. Así para j = 1, 2,...,M −1 tenemos que

$$\langle\left(l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)\right)_{k=0}^{M-1}, \left(m_j\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)\right)_{k=0}^{M-1}\rangle =$$
$$=\sum_{i=0}^{M-1}\lambda_i(\omega)\sum_{k=0}^{M-1} m_i\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)\overline{m_j\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)}$$
$$=\sum_{i=0}^{M-1}\lambda_i(\omega)\delta_{i,j}=\lambda_j(\omega).$$

Se tiene que

(3.10)
$$\lambda_j(\omega)=\sum_{k=0}^{M-1} l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)\overline{m_j\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)},$$

para j = 1,..., M −1.

Entonces

$$\lambda_j\left(\omega+\frac{2\pi}{M}\right)=\sum_{k=1}^{M} l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)\overline{m_j\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)}$$
$$=\sum_{k=0}^{M-1} l_f\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)\overline{m_j\left(e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)}\right)}$$
$$=\lambda_j(\omega).$$

Así, λ_j es $\frac{2\pi}{M}$ -periódica. Definamos $s_j(\omega)=\lambda_j\left(\frac{\omega}{M}\right)$, de manera que $s_j(\omega)$ es 2π-periódica. Entonces, de (3.9) se deduce

$$l_f(\omega)=\sum_{j=1}^{M-1}\lambda_j(\omega)\, m_j(e^{i\omega})=\sum_{j=1}^{M-1} s_j(M\omega)\, m_j(e^{i\omega})$$

Por lo tanto, hemos probado que si $f \in V_0 \oplus V_{-1} = W_{-1}$, tenemos que

$$\hat{f}(\omega)=l_f(\omega)\hat{\varphi}(\omega)=\sum_{j=1}^{M-1} s_j(M\omega)\, m_j(e^{i\omega})\hat{\varphi}(\omega)$$

para $s_j(\omega) \in L^2(\boldsymbol{T})$ 2π-periódica. Es fácil probar que las funciones de esta forma pertenecen a W_0.

Esto termina la demostración del Lema.

Teorema 3.1. *Si $M(e^{i\omega})$ es una matriz unitaria, la colección $\{\psi^s(x-k) : k \in \boldsymbol{Z}, s=1,\ldots,M-1\}$ definida por*

(3.11) $$\hat{\psi}^s(\omega)=m_s\left(e^{i\frac{\omega}{M}}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right)$$

es una base ortonormal de $W_0 = V_1 \ominus V_0$.

Demostración. Supongamos que $M(e^{i\omega})$ es unitaria y sea s ∈{1,2,...,M−1}. Comencemos por mostrar que ψ^s es un elemento de V_1. Para ello basta encontrar coeficientes con $Pk \in \sum_{k\in\boldsymbol{Z}}|\beta_{s,k}|^2<\infty$ de manera que

(3.12)
$$\psi^s(x)=M\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\beta_{s,k}\,\varphi(Mx-k)$$

ya que $\{M\varphi(Mx-k): k \in \boldsymbol{Z}\}$ es un sistema de generadores de V_1. Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad (3.12) se deduce que

$$\hat{\psi}^s(\omega)=\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}\beta_{s,k}\, e^{-iK\frac{\omega}{M}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right).$$

De (3.11) se deduce

$$\hat{\psi}^s(\omega)=m_s\left(e^{i\frac{\omega}{M}}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right)=\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} a_{s,k}\, e^{-iK\frac{\omega}{M}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right).$$

Comparando estas dos últimas igualdades se tiene que $\beta_{s,k}=a_{s,k}$.

Por otro lado, para mostrar que ψs es ortogonal a V_0 en $L^2(\boldsymbol{R})$ basta probar que los productos escalares de ψ^s con todos los elementos de la colección $\{\varphi(x+l) : l \in \boldsymbol{Z}\}$ son nulos. Usando el teorema de Plancherel para la transformada de Fourier se tiene que:

$$2\pi\langle\psi^s(x),\varphi(x+l)\rangle=\langle\hat{\psi}^s(\omega),\hat{\varphi}(\omega+l)\rangle=$$
$$=\langle m_s\left(e^{i\frac{\omega}{M}}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right), e^{il\omega}\hat{\varphi}(\omega)\rangle$$
$$=\langle\frac{1}{M}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} a_{s,k}\, e^{-iK\frac{\omega}{M}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right), e^{il\omega}m_0\left(e^{i\frac{\omega}{M}}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right)\rangle$$
$$=\frac{1}{M}\sum_{k'\in\boldsymbol{Z}}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} a_{s,k}\,\overline{a_{0,k'}}\,\langle e^{-iK\frac{\omega}{M}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right), e^{il\omega}e^{-iK'\frac{\omega}{M}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right)\rangle$$
$$=\frac{1}{M}\sum_{k'\in\boldsymbol{Z}}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} a_{s,k}\,\overline{a_{0,k'}}\langle M\varphi(Mx-k'), M\varphi(Mx-k'+lM)\rangle$$
$$=\sum_{k'\in\boldsymbol{Z}}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} a_{s,k}\overline{a_{0,k'}}\delta_{k,k'-lM}$$
$$=\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} a_{s,k}\overline{a_{0,k+lM}}=0$$

(3. 14)

por la proposición 3.1, puesto que $s \neq 0$. En consecuencia ψ^s es un elemento de W_0 para todo s en {1,2,...,M −1}.

Para probar que es un sistema ortonormal basta probar que:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left|\widehat{\psi}^{s}(M\omega + 2k\pi)\right|^2 = 1 \qquad \forall s \in \{1,2,\dots,M-1\}.$$

En efecto; si $s \in\{1,2,\dots,M-1\}$ se tiene:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left|\widehat{\psi}^{s}(M\omega + 2k\pi)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left|m_s\left(e^{i(\omega+\frac{2k\pi}{M})}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\omega+\frac{2k\pi}{M}\right)\right|^2$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}} \left|m_s\left(e^{i\left(\omega+\frac{2(lM+m)\pi}{M}\right)}\right)\right|^2 \left|\widehat{\varphi}\left(\omega+\frac{2(lM+m)\pi}{M}\right)\right|^2$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}} \left|m_s\left(e^{i\left(\omega+2l\pi\frac{2m\pi}{M}\right)}\right)\right|^2 \left|\widehat{\varphi}\left(\omega+\frac{2(lM+m)\pi}{M}\right)\right|^2.$$

Como $m_s(e^{i\omega})$ es una función 2π-periódica se tiene que:

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \left|\widehat{\psi^s}(M\omega + 2k\pi)\right|^2 =$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}} \left|m_s\left(e^{i\left(\omega+\frac{2m\pi}{M}\right)}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\omega + \frac{2(lM+m)\pi}{M}\right)\right|^2$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} \left|m_s\left(e^{i\left(\omega+\frac{2m\pi}{M}\right)}\right)\right|^2 \sum_{l\in\mathbf{Z}} \left|\hat{\varphi}\left(\omega + \frac{2(lM+m)\pi}{M}\right)\right|^2$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} \left|m_s\left(e^{i\left(\omega+\frac{2m\pi}{M}\right)}\right)\right|^2 = 1$$

en donde la última igualdad se deduce del lema 3.1.

Esto prueba que si $s \in \{1,2,\dots,M-1\}$, $\{\psi^s(x-k): k \in \mathbf{Z}\}$ es un sistema ortonormal.

Ahora tenemos que comprobar que si $s,s' \in \{1,2,\dots,M-1\} y\ s \neq s'$ se tiene $< \psi^s(x-k), \psi^{s'}(x-k') \geq 0$ para todo $k,k' \in \mathbf{Z}$.

Con un cálculo similar al de (3.14) se deduce

$$2\pi < \psi^s(x-k), \psi^{s'}(x-l) \geq$$

$$= \sum_{k'\in\mathbf{Z}}\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{s,k}\overline{a_{s',k'-lM}}\delta_{k.k'-lM}$$

$$= \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{s,k}\overline{a_{s',k-lM}} = 0$$

por la proposición 3.1, puesto que $s \neq s'$. Tenemos entonces, que $\{\psi^s(x-k): k \in \mathbf{Z}, s = 1,2,\dots,M-1\}$ es un sistema ortonormal de W_0. Ahora observemos que las funciones $\{\psi^s(x-k): k \in \mathbf{Z}, s = 1,2,\dots,M-1\}$ generan $W_0 = V_1 \ominus V_0$. En efecto: hemos probado que $\psi^s(x-k) \in V_1 \ominus V_0$ y además tenemos que

(3.13) $\quad \widehat{\psi^s}(\omega) = m_s\left(e^{i\frac{\omega}{M}}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right).$

Si $f \in W_0$, por el lema 3.2 se tiene

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{j=1}^{M-1} s_j(\omega) m_j\left(e^{i\frac{\omega}{M}}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{M}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{M-1} s_j(\omega)\widehat{\varphi^j}(\omega),$$

Con s_j 2π-periódica en $L^2(\mathbf{T})$. Escribamos

entonces

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{j=1}^{M-1}\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}e^{-ik\omega}\right)\widehat{\psi^j}(\omega)$$

y

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_{j,k}\,\psi^j(x-k)$$

lo que prueba el resultado deseado. □

El teorema 3.1 nos proporciona una manera de encontrar M-ondículas: basta encontrar M funciones $m_s(e^{i\omega}), s = 0,1,\dots,M-1$ de manera que la matriz $M(e^{i\omega})$ sea unitaria. A su vez, esta matriz es unitaria si y solo si se cumplen las relaciones de la proposición 3.1. Estas relaciones se simplifican si las sucesiones $\{a_{s,k}\}$ solo tienen M términos no nulos, a saber $\{a_{s,0}, \dots, a_{s,M-1}\}$. En esta situación, la matriz $M(e^{i\omega})$ es unitaria si y solo si

(3.14)

$$\sum_{k=0}^{M-1} a_{s,k}\overline{a_{s',k}} = M\delta_{s.s'} \quad s,s' \in \{0,1,\dots,M-1\}.$$

Si escribimos A para representar la matriz $\left(a_{s,k}\right)_{s=0,\,k=0}^{M-1\,M-1}$, de orden M x M, (3.14) es equivalente a

(3.15) $\qquad A\overline{A^t} = MI$:

Un ejemplo de una matriz A de orden M x M que satisface (3.15) lo proporciona la transformada de coseno discreta. En el teorema 2.5 del capítulo 9 de [HW] se prueba que los vectores

$$C_0^{(M)} = \frac{1}{\sqrt{M}}(1,\dots,1)$$

$$C_s^{(M)} = \sqrt{\frac{2}{M}}\left(\cos\left(\frac{s\pi}{M}.\frac{2k+1}{2}\right)\right)_{k=0}^{M-1},$$

$$s = 1,\dots,M-1$$

forman una base ortonormal de $\mathbf{R}^M$. Tomando $a_{0,k}^{(M)} = 1, k = 0,1,\dots,M-1, s = 1,\dots,M-1$

$$a_{s,k}^{(M)} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{s\pi}{M}.\frac{2k+1}{2}\right), k = 0,1,\dots,M-1, s = 1,\dots,M-1$$

se tiene un ejemplo de una matriz A (real) que satisface (3.15).

Ejemplo: Para $M = 3$, la matriz A con elementos dados por (3.15) es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

La función de escala φ satisface

$$\hat{\varphi}(3\omega) = \frac{1}{3}(1 + e^{-i\omega} + e^{-2i\omega})\hat{\varphi}(\omega)$$

Por tanto

$$\frac{1}{3}\varphi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}\varphi(x) + \frac{1}{3}\varphi(x+1) + \frac{1}{3}\varphi(x+2),$$

y una solución de esta ecuación es

$$\varphi(x) = \mathcal{X}_{[-1,0]}(x) \quad (3.16)$$

Para las ondículas tenemos

$$\widehat{\psi^{(1)}}(3\omega) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{-2i\omega}\right)\hat{\varphi}(\omega).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{3}\psi^{(1)}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\varphi(x) - \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\varphi(x+2)$$

y

$$\psi^{(1)}(\mathrm{x}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varphi(3x) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\varphi(3x+2) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathcal{X}_{\left[-\frac{1}{3},0\right]}(x) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\mathcal{X}_{\left[-1,-\frac{2}{3}\right]}(x)$$

Finalmente

$$\psi^{(2)}(\mathrm{x}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\mathcal{X}_{\left[-\frac{1}{3},0\right]}(x) - \sqrt{2}\mathcal{X}_{\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right]}(x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\mathcal{X}_{\left[-1,-\frac{2}{3}\right]}(x)$$

4. Propiedades de las M-ondículas con soporte compacto

El ejemplo dado al final de la sección anterior es una colección de 3-ondículas con soporte compacto. De hecho, todas las M-ondículas obtenidas con los filtros cuyos coeficientes se dan en (3.16) tienen soporte compacto.
Por otro lado, ninguna de ellas es continua.

Los siguientes teoremas que demostraremos a continuación nos dan algunas propiedades de estas, en especial las relacionadas con el número de momentos nulos que deben tener.

Teorema 4.1. *Sea r un entero no negativo. Sea* $\psi \in C^r(\boldsymbol{R})$, *tal que* $\psi^{(l)} \in L^\infty(\boldsymbol{R})\ para\ l = 1,\dots,r\ y$

$$(4.1)\quad |\psi(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^{r+1+\epsilon}}\ para\ algún\ \epsilon > 0.$$

Si $\{\psi_{j,k} : j,k \in \boldsymbol{Z}\}$ *es un sistema ortonormal en* L^2 *(**R**), entonces, todos los momentos de* ψ *hasta el orden r son cero, esto es;*

$$\int_R x^l\psi(x)dx = 0 \quad \forall l = 0,1,\dots,r.$$

Demostración. Hagamos la prueba por inducción comenzando por el caso r = 0.

Tenemos $\psi \in C^0(\boldsymbol{R})$ tal que

$$|\psi(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^{r+1+\epsilon}}\ para\ algún\ \epsilon > 0$$

y queremos probar que

$$\int_R \psi(x)dx = 0$$

Puesto que $\|\psi\|_2 = 1$ y ψ es contínua, existe $a = M^{-j_0}k_0$ para algunos $j_0, k_0 \in \boldsymbol{Z}$ tal que $\psi(a) \neq 0$ (se usa también la densidad del conjunto $\{M^{-j}k : j,k \in \boldsymbol{Z}\}$ en **R**).

Por otro lado como $\{\psi_{j,k} : j,k \in \boldsymbol{Z}\}$ es un sistema ortonormal sabemos que

$$\int_R \overline{\psi(x)}\psi(M^jx - k)dx = 0\ \ si\ \ (j,k) \neq (0,0).$$

Tomando $k = M^{j-j_0}k_0\ con\ j > máx\{j_0, 0\}\ tenemos$

$$0 = \int_R \overline{\psi(x)}\psi(M^jx - M^{j-j_0}k_0)dx = \int_R \overline{\psi(x)}\psi\left(M^j(x - M^{-j_0}k_0)\right)dx = \int_R \overline{\psi(x)}\psi\left(M^j(x-a)\right)dx.$$

Haciendo el cambio de variable $y = M^j(x-a)$ tenemos que

$$\int_R \psi(y)\overline{\psi(M^{-j}y + a)}dy = 0.$$

Haciendo $j \to \infty$ por el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$\overline{\psi(a)}\int_R \psi(y)dy = 0;$$

en consecuencia

$$\int_R \psi(y)dy = 0.$$

Hacemos ahora el caso $r = 1$. Puesto que

$$\int_R \psi(y)dy = 0$$

la función

$$\nu(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy$$

tiende a cero cuando $x \to +\infty$. Además

$$\nu(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy = -\int_{x}^{+\infty} \psi(y)dy.$$

Puesto que

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{2+\epsilon}} \quad para\ algún\ \epsilon > 0$$

se tiene que

$$|\nu(x)| \leq \int_{-\infty}^{x} \frac{C}{(1+|y|)^{2+\epsilon}} dx = \frac{C}{(1+|x|)^{1+\epsilon}}.$$

Integrando por partes y usando esta última estimación se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x} \psi(y)dydx$$
$$= x\nu(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)dx.$$

Entonces es suficiente mostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(x)dx = 0.$$

Para ello adaptaremos el argumento del caso $r = 0$.

Ya que ψ no es constante, puesto que si lo fuese $\psi \notin L^2$ (**R**), y ψ' es contínua puesto que $\psi \in C^1(\mathbf{R})$, existe $a = M^{-j_0}k_0$ tal que $\psi'^{(a)} \neq 0$. Entonces si $j > \max\{j_0, 0\}$

$$\int_R \overline{\psi(x)}\psi\left(M^j(x-a)\right)dx = 0,$$

e integrando por partes se tiene que

$$\int_R \overline{\psi(x)}\psi\left(M^j(x-a)\right)dx$$
$$= \overline{\psi(x)}\int_{-\infty}^{x} \psi\left(M^j(y-a)\right)dy|_{-\infty}^{+\infty}$$
$$-\int_R \overline{\psi'^{(x)}}\left(\int_{-\infty}^{x} \psi\left(M^j(y-a)\right)dy\right)dx$$
$$= -\int_R \overline{\psi'^{(x)}}\nu\left(M^j(x-a)\right)dx.$$

Por lo tanto

$$0 = \int_R \overline{\psi'^{(x)}}\nu\left(M^j(x-a)\right)dx$$
$$= \int_R \overline{\psi'^{(a+M^{-j}y)}}\nu(y)dy.$$

Haciendo $j \to \infty$ se obtiene

$$\overline{\psi'^{(a)}}\int_R \nu(y)dy = 0.$$

Por lo tanto

$$\int_R \nu(y)dy = 0 \quad \text{puesto que} \quad \overline{\psi'^{(a)}} \neq 0.$$

En consecuencia

$$\int_R x\psi(x)dx = 0$$

y se cumple la condición para $r = 1$

Ahora procedamos por inducción de $r-1$ a r. Supongamos que todos los momentos hasta el orden $r-1$ son cero; podemos integrar ψ r-veces y obtenemos funciones $\nu_1 = \nu, \nu_2, \dots, \nu_r$ tal que $\nu_l' = \nu_{l-1}$ y $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ tienden a cero cuando $|x| \to \infty$.

Por otro lado, existe una constante C_l tal que

$$|\nu_l(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{r-l+1+\epsilon}}, \quad l = 1, 2, \dots, r$$

e integrando por partes r-veces se tiene que

$$\int_R x^r\psi(x)dx = 0 \text{ si y solo si } \int_R \nu_r(y)dy = 0.$$

Como ψ no es polinomial, porque si fuese un polinomio $\psi \notin L^2$ (**R**), y ψ' es contínua, existe un $a = M^{-j_0}k_0$ con $\psi^{(r)}(a) \neq 0$ tal que

$$\int_R \overline{\psi^{(r)}(x)}\left(M^j(x-a)\right)dx = 0.$$

Así se obtiene

$$\int_R \overline{\psi(x)}\nu_r\left(M^j(x-a)\right)dx = 0,$$

mediante integración por partes. Luego haciendo el cambio de variable $y = M^j(x-a)$ y haciendo $j \to \infty$ obtenemos el resultado deseado. □

Teorema 4.2. *Sea $\psi \in L^2$ (**R**) una función con soporte compacto tal que $\psi \in C^\infty$. Entonces $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ no puede ser un sistema ortonormal en L^2 (**R**), donde $\psi_{j,k}(x) = M^{\frac{j}{2}}\psi(M^jx - k)$.*

Demostración. Si $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$ es un sistema ortonormal en L^2 (**R**), puesto que ψ tiene soporte compacto, tenemos

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^L} \quad para\ todo\ L > 0$$

y por tanto todos los momentos de ψ son nulos por el teorema (4.1).

Entonces se sigue que para todo polinomio P(x)

$$\int_R P(x)\overline{\psi(x)}dx = 0 \tag{4.2}$$

Como ψ tiene soporte compacto, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar un polinomio P(x) tal que $sup_{x\in K}|\psi(x) - P(x)| < \epsilon$, donde K es el soporte de ψ.

Aquí hemos usado el teorema de Weierstrass.

Por lo tanto, se tiene que

$$\|\psi\|_2^2 = \int_R \psi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

$$= \int_K \psi(x)\overline{\psi(x)}dx - \int_K P(x)\overline{\psi(x)}dx$$

$$= \int_R [\psi(x) - P(x)]\overline{\psi(x)}dx$$

$$= \epsilon\|\psi\|_1.$$

Como $\|\psi\|_1 < \infty\, y\, \epsilon$ es arbitrario concluimos que $\|\psi\|$_2^2 $= 0$ lo que nos da una contradicción.

□

5. Conclusiones

Con esto hemos construido M-ondículas en los reales con soporte compacto que capturan los detalles de una señal dada. En una siguiente edición construiremos sucesiones de escala para construir matrices de M-ondículas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS Y ELECTRONICAS

[BA] P. J. Burt, E. H. Adelson, *The Laplacian pyramid as a compact image code*, IEEE Trans. Comm., 31, (1983), 532-540.

[He] P. N. Heller, *Rank M Wavelets with N Vanishing Moments*, Siam J. Matrix Anal. Appl. Vol.16, No. 2, pp. 502-519, Abril 1995.

[HW] E. Hernández, G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Boca Raton FL, (1996).

[Ma] S. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for* $L^2(\mathbf{R})$, Trans. of Amer. Math. soc., 315, (1989), 69-87.