

## COMPARACIÓN DE ALGUNOS ESQUEMAS IMPLICITOS PARA LA ECUACIÓN DE RICHARDS UNIDIMENSIONAL POR EL MÉTODO DE VOLUMENES FINITOS

(COMPARISON OF SOME IMPLICIT SCHEMES FOR THE ONE-DIMENSIONAL RICHARDS EQUATION BY THE FINITE VOLUME METHOD)

Guillermo Albuja<sup>1</sup>, Romel Pineda<sup>2</sup>

**Resumen.** En este trabajo se desarrollaron y se compararon algunos esquemas numéricos para resolver la ecuación diferencial de Richards unidimensional. En el tiempo se usó un esquema de Euler backward, y para el espacio el método de volúmenes finitos, con diferentes formas de ponderación de la conductividad hidráulica. Se probó los esquemas con una malla temporal uniforme con pasos de tiempo de 60, 720, 2160, 3240 segundos y una malla espacial también uniforme de 0.6, 3, 6 y 9 centímetros se analizaron los resultados a 2 horas con una profundidad de 60 centímetros.

**Palabras clave:** Ecuación de Richards, Picard modificado, Método de volúmenes finitos, Van Genuchten.

**Abstract.** In this work, some numerical schemes were developed and compared to solve the one-dimensional Richards differential equation. In time, an Euler backward scheme was used, and for space, the finite volume method, with different ways of weighting hydraulic conductivity. The schemas were tested with a uniform temporal mesh with time steps of 60, 720, 2160, 3240 seconds and a uniform spatial mesh of 0.6, 3, 6 and 9 centimeters. The results were analyzed at 2 hours with a depth of 60 centimeters.

**Key words:** Richards equation, modified Picard, finite volume method, Van Genuchten.

### 1. INTRODUCCIÓN

El flujo no saturado a través de medios porosos tiene muchísimas aplicaciones en la ingeniería por lo que es de vital importancia para la sociedad, algunos ejemplos en este sentido son los flujos de aguas subterráneas, la dinámica de humedad en materiales de construcción, también es importante en la agricultura ya que el flujo de agua en el suelo tiene un efecto significativo en el crecimiento de las plantas, por mencionar algunas. Es por esto que resulta indispensable estudiar y entender claramente este fenómeno el cual es descrito por la ecuación de Richards, que es una ecuación diferencial parcial no lineal degenerada de la cual no se conocen soluciones analíticas por lo cual resulta indispensable el desarrollo de esquemas numéricos eficientes que permitan obtener soluciones numéricas.

El flujo de agua a través de un medio poroso tanto en la zona saturado como en la zona vadosa o no saturado es matemáticamente descrito por la ecuación de Richards, esta fue propuesta por Richards en 1930 para mayor información ver ([10]). La ecuación resulta de combinar la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad ([11]), y la ley de Darcy-Buckingham ([2]).

Generalmente se presentan tres formas principales de la ecuación de Richards: En términos de presión, del contenido de humedad y la forma mixta, en este trabajo se considera la ecuación de Richards en su forma mixta así:

$$\frac{\partial \theta(\Psi)}{\partial t} - \text{div} \left( K(\theta(\Psi)) \nabla(\Psi + z) \right) = f \quad (1)$$

En la ecuación (1),  $\Psi$  representa la cabeza presión,  $\theta$  es el contenido de humedad,  $z$  es la profundidad,  $K$  la conductividad hidráulica del medio poroso,  $t$  es el tiempo y  $f$  es el termino representa las fuente o sumideros fuente.

De manera general cuando se modelan procesos de infiltración de agua en una sola capa de suelo las funciones  $\theta$  y  $K$  son funciones de  $\Psi$ . En base a resultados experimentales diferentes curvas se han propuesto para describir la dependencia entre  $K$ ,  $\theta$  y  $\Psi$ , una de las más usadas son las ecuaciones de Van Genuchten ([5]) las cuales escribimos a continuación

$$\theta(\Psi) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (\alpha|\Psi|)^n]^m} & \text{si } \Psi \leq 0 \\ \theta_s & \text{si } \Psi > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$K(\Psi) = \begin{cases} K_s \frac{[1 - (\alpha|\Psi|)^{n-1} (1 + (\alpha|\Psi|)^n)^{-m}]^2}{[1 + (\alpha|\Psi|)^n]^{\frac{2m}{n}}} & \text{si } \Psi \leq 0 \\ K_s & \text{si } \Psi > 0 \end{cases} \quad (3)$$

Donde  $\theta_s$  es el contenido de humedad saturado,  $\theta_r$  es el contenido de humedad residual,  $K_s$  es la conductividad hidráulica saturada y  $\alpha, n, m$  son constantes propias del suelo. En la zona saturada es decir donde los poros se llenan completamente de

<sup>1</sup>Guillermo Albuja, Centro de Matemática, Profesor de la Carrera de Ingeniería Matemática de la Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática, Universidad Central del Ecuador (UCE), Quito, Ecuador; (e-mails: gaalbuja@uce.edu.ec, galbujap@gmail.com).

<sup>2</sup>Romel Pineda, Centro de Matemática, Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática, Universidad Central del Ecuador (UCE), Quito, Ecuador; (e-mails: rtpineda@uce.edu.ec, romelp@hotmail.com).

agua se tiene que  $\Psi > 0$  y además  $K = K_s$ ,  $\theta = \theta_s$ , lo que significa que  $\theta, K$  son constantes, por lo tanto la ecuación de Richards en términos del contenido de humedad deja de tener sentido. Mientras que si el flujo es no saturado es decir los poros contienen agua, aire o una combinación agua-aire se tiene que  $\Psi \leq 0$ , siendo además  $\theta, K$  funciones no lineales de  $\Psi$ . Por otro lado, la ecuación de Richards se degenera cuando  $\frac{\partial \theta}{\partial \Psi} = 0$  caso de difusión rápida, en todo caso la región de degeneración depende de la saturación del medio por lo que estas regiones no pueden ser conocidas a-priori y pueden variar en el tiempo y en el espacio, por lo expuesto anteriormente la ecuación de Richards es una ecuación altamente no lineal degenerada, además, es típico de estos problemas la baja regularidad de las soluciones ver ([1]), es por esto que el análisis y diseño de esquemas numéricos para la ecuación de Richards es muy complicado, en cuanto a la existencia unicidad y regularidad de la solución de esta ecuación fue analizada en la década de 1980 por Alt y Luckhaus para mayores detalles ver ([1]).

## 2. ESQUEMA NUMÉRICO

Considere la ecuación unidimensional de Richards en forma mixta que modela el flujo vertical de agua en el suelo en condiciones de no saturación con condiciones de frontera de Dirichlet y su condición inicial.

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta(\Psi)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\Psi) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} + 1 \right) \right] = 0 \\ \text{en } (a, 0) \times [0, T] \\ \Psi(a, t) = \Psi_a(t) \text{ para } t \in [0, T] \\ \Psi(0, t) = \Psi_0(t) \text{ para } t \in [0, T] \\ \Psi(z, 0) = g(t) \text{ para } z \in (a, 0) \end{cases} \quad (4)$$

Donde  $K$  y  $\theta$  son como en (2 y 3),  $a < 0$  es una constante asociada con la profundidad del suelo y  $T > 0$  es una constante positiva asociada con el tiempo.

La ecuación de Richards no tiene una solución analítica general, por lo tanto, es necesario el uso de aproximaciones numéricas. Se presentarán algunos esquemas implícitos en el tiempo para resolver la ecuación de Richards en forma mixta (4).

Primero discretizaremos en la variable temporal, en la ecuación (4) con un esquema de Euler backward según ([7]) esto se debe dos razones, la necesidad de una discretización estable permite pasos de

tiempo largos y la baja regularidad de la solución que no soporta cualquier esquema de alto orden en cuanto a la discretización espacial existen muchas más opciones posibles. Para esto definimos  $\Delta t = T/M$  donde  $T$  es tiempo total de simulación y  $M$  es una constante que tiene que ver con el número de nodos de la malla temporal. Usando siguiente notación  $\theta(\Psi(z, t_k)) = \theta_k$  la discretización temporal es como se sigue:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \approx \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\Delta t} \quad (5)$$

$$\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{k+1} \frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_{k+1}}{\partial z}$$

Según los trabajos de Celia ([3]),([4]) y ([6]) la discretización con un esquema de Euler backward de la forma basada en la cabeza de presión arroja resultados pobres, caracterizados por un gran error en el balance de masa y estimaciones erróneas de la profundidad de infiltración, en contraste con la discretización de la forma mixta que produce un correcto balance de masa aun cuando debemos señalar que un correcto balance de masa es una condición necesaria pero no suficiente para obtener una solución correcta según estos mismos autores para linealizar la ecuación (5) con un esquema de Picard modificado aplicamos primero un esquema de Picard estándar de la siguiente manera:

$$\frac{\theta_{k+1}^{n+1} - \theta_k}{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) - \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Luego usamos una aproximación de  $\theta_{k+1}^{n+1}$  mediante un polinomio de Taylor de primer orden en una vecindad  $\theta_{k+1}^n$  así:

$$\theta_{k+1}^{n+1} = \theta_{k+1}^n + C_{k+1}^n (\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n) \quad (7)$$

$$\text{Donde } C_{k+1}^n = \frac{\partial \theta_{k+1}^n}{\partial \Psi}$$

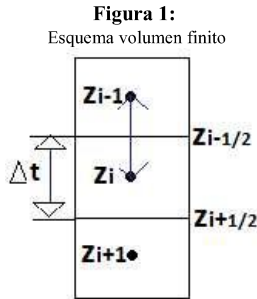
Reemplazando (7) en (6) y reordenando algunos términos se tiene que

$$C_{k+1}^n (\Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n) - \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) - \Delta t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} = \theta_k - \theta_{k+1}^n \quad (8)$$

Sumando  $\Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^n}{\partial z} \right)$  ambos lados de la igualdad en (8) y haciendo  $\varepsilon_{k+1}^{n+1} = \Psi_{k+1}^{n+1} - \Psi_{k+1}^n$ . Tenemos que

$$C_{k+1}^n(\varepsilon_{k+1}^{n+1}) - \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{k+1}^n \frac{\partial \varepsilon_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) = \theta_k - \theta_{k+1}^n - \Delta t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^n}{\partial z} \right) \quad (9)$$

A continuación, discretizamos la variable espacial para mayores detalles ver ([3]), ([8]) la formulación que se muestra es de hecho un esquema de volumen finito 1D para una malla estructurada uniforme, aunque las expresiones se parecen al esquema de diferencia finita centrada. (ver Figura 1)



Para discretizar espacialmente utilizaremos el método de volúmenes finitos para cual subdividiremos el dominio  $(a, 0)$  en volúmenes de control iguales o también llamadas celdas he integraremos toda la ecuación (9) sobre el volumen de control entre  $z - \frac{1}{2}$  y  $z + \frac{1}{2}$  como se muestra a continuación

$$\int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} C_{k+1}^n(\varepsilon_{k+1}^{n+1}) - \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{k+1}^n \frac{\partial \varepsilon_{k+1}^{n+1}}{\partial z} \right) = \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \theta_k - \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \theta_{k+1}^n - \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \Delta t \frac{\partial K_{k+1}^n}{\partial z} + \int_{z_{i-1/2}}^{z_{i+1/2}} \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{k+1}^n \frac{\partial \Psi_{k+1}^n}{\partial z} \right) \quad (10)$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo y el teorema de la divergencia de Gauss en la ecuación (10) se tiene que

$$C_{k+1}^{n,i}(\varepsilon_{k+1}^{n+1,i}) \Delta z - \Delta t \left[ K_{k+1}^{n,i+1/2} \frac{\partial \varepsilon_{k+1}^{n+1,i+1/2}}{\partial z} - K_{k+1}^{n,i-1/2} \frac{\partial \varepsilon_{k+1}^{n+1,i-1/2}}{\partial z} \right] = \theta_k^i \Delta z - \theta_{k+1}^{n,i} \Delta z +$$

$$\Delta t \left( K_{k+1}^{n,i+1/2} - K_{k+1}^{n,i-1/2} \right) + \Delta t \left( K_{k+1}^{n,i+1/2} \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n,i+1/2}}{\partial z} - K_{k+1}^{n,i-1/2} \frac{\partial \Psi_{k+1}^{n,i-1/2}}{\partial z} \right) \quad (11)$$

Para aproximar  $\frac{\partial \varepsilon_{k+1}^{n+1,i+1/2}}{\partial z}$  y  $\frac{\partial \Psi_{k+1}^{n,i+1/2}}{\partial z}$  aplicamos diferencias finitas centrales a (11) y reordenando los términos se tiene que

$$C_{k+1}^{n,i}(\varepsilon_{k+1}^{n+1,i}) \Delta z - \Delta t \left[ K_{k+1}^{n,i+1/2} (\varepsilon_{k+1}^{n+1,i+1} - \varepsilon_{k+1}^{n+1,i}) - K_{k+1}^{n,i-1/2} (\varepsilon_{k+1}^{n+1,i} - \varepsilon_{k+1}^{n+1,i-1}) \right] = \theta_k^i \Delta z^2 - \theta_{k+1}^{n,i} \Delta z^2 + \Delta z \Delta t \left( K_{k+1}^{n,i+1/2} - K_{k+1}^{n,i-1/2} \right) + \Delta t \left( K_{k+1}^{n,i+1/2} (\Psi_{k+1}^{n+1,i+1} - \Psi_{k+1}^{n+1,i}) - K_{k+1}^{n,i-1/2} (\Psi_{k+1}^{n+1,i} - \Psi_{k+1}^{n+1,i-1}) \right) \quad (12)$$

El tema de seleccionar un método apropiado para calcular la conductividad hidráulica  $(K_{i \pm \frac{1}{2}})$  de la interface (también referido en la bibliografía como interconexión, interbloque, interface o conductividad del internodo) ha sido extensamente discutido e identificado como una cuestión de gran importancia para la calidad y la estabilidad ([6]). Se han propuesto varias técnicas en la literatura (véanse, por ejemplo, ([3]) y ([6])), algunas de las cuales se resumen aquí:

1. Media aritmética

$$K_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{K_i + K_{i \pm 1}}{2}$$

2. Media geométrica

$$K_{i \pm \frac{1}{2}} = \sqrt{K_i K_{i \pm 1}}$$

3. Media armónica

$$K_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_{i \pm 1}}}$$

4. Media ascendente

$$K_{i \pm \frac{1}{2}} = \begin{cases} \text{Max}(K_i, K_{i \pm 1}) & \text{si } \varepsilon_{i \pm 1} - \varepsilon_i + z_{i \pm 1} - z_i \geq 0 \\ \text{Min}(K_i, K_{i \pm 1}) & \text{si } \varepsilon_{i \pm 1} - \varepsilon_i + z_{i \pm 1} - z_i < 0 \end{cases}$$

Usando cada una de estas ponderaciones se tiene esquemas completamente diferentes, en este artículo se compara estos esquemas en términos de exactitud.

### 3. CONJUNTO DE DATOS

Dado que no existe una solución analítica conocida para la ecuación de Richards, para contrastar la exactitud de los diferentes esquemas se tomó referencia el programa elaborado por Naula-Albuja ([9]), este usa el método de elementos finitos con un esquema de linealización de Newton. Se ha tomado una malla bien fina tanto temporalmente como espacialmente, esta tipo de validación fue presentado en los trabajos de Celia ([4]) y ([6]). Los siguientes parámetros del suelo fueron usados en el modelo de Van Genuchten ([5]), estos fueron utilizados por Celia ([4]), y posteriormente han sido empleados como referencia por varios autores.

$$\theta_s = 0.368 \frac{m^3}{m^3},$$

$$\theta_r = 0.102 \frac{m^3}{m^3},$$

$$\alpha = 0.0335 \text{ cm}^{-1},$$

$$m = 1 - \frac{1}{n},$$

$$n = 2,$$

$$K_s = 0.00922 \frac{cm}{s}.$$

Las condiciones de borde y frontera son:

$$\Psi(0, t) = -1000 \text{ cm},$$

$$\Psi(-60 \text{ cm}, t) = -75 \text{ cm},$$

$$\Psi(z, 0) = -1000 \text{ cm}.$$

El tiempo de simulación fue hecho para 2 horas.

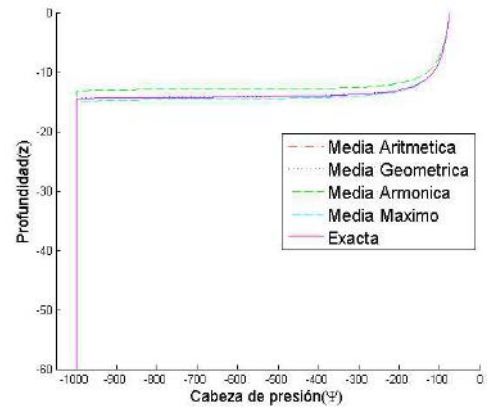
### 4. RESULTADOS

Una primera comparación se hace tomando una malla bien fina entre todas las comparaciones de ponderación para la conductividad hidráulica y el programa de Naula-Albuja ([9]) que se le tomo como solución exacta. Los diferentes esquemas implícitos y el programa de Naula-Albuja fueron hechos en el programa Matlab versión 2014b y fueron ejecutadas las simulaciones en un computador con un procesador Intel(R) Core(TM) i-7-4790 CPU@3.60Hz con 16 RAM.

Cuando la malla temporal y espacial es bien fina todas las ponderaciones son buenas aproximaciones excepto la media armónica esto se observa clara mente en la Figura 2 que está alejada de la solución

Figura 2:

Comparación de esquemas  $\Delta z = 0.1, \Delta t = 0.1$



exacta, es decir con la ponderación de la media armónica se subestima el frente húmedo.

Ahora veremos qué tan sensible son los esquemas implícitos al cambio de malla temporal y espacial.

En la Tabla 1. se observa los diferentes tipos de ponderaciones con sus respectivos errores relativo (para mayores detalles del cálculo del error ver ([6])) para distintos tamaños de malla, es así que la ponderación con la media aritmética es la mejor y el error se reduce significativamente cuando la malla es más fina a diferencia de la media armónica que da aproximaciones malas con grandes errores este hecho también se puede ver de manera gráfica en la Figura 5

Tabla 1:  
Tabla de errores fijo  $\Delta t = 1 \text{ seg}$

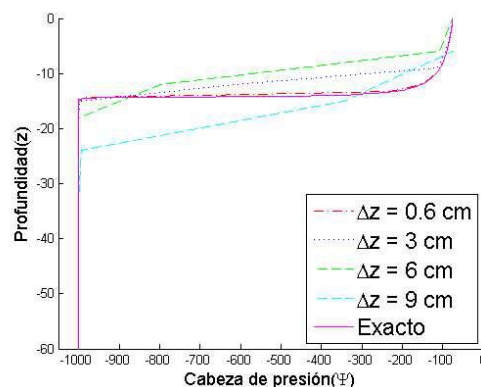
$\Delta z(\text{cm})$	Media Aritmetica	Media Geometrica	Media Armonica	Media Ascendente
0.6	1.12	1.14	151.16	2.22
3	6.49	14.97	165.16	11.74
6	9.98	40.24	141.15	14.41
9	30.92	11.81	2.46	31.08

Como era de esperarse los esquemas numéricos estudiados no son tan sensibles al paso de tiempo aun cuando uno toma pasos de tiempo muy grandes, esto se puede observar en la Tabla 2. Aquí se puede ver que las ponderaciones de las medias: aritmética y geométrica son igual de buenos aun cuando la malla temporal es grande a diferencia de la media armónica que con pasos de tiempos pequeños no dan buenas aproximaciones, pero a pasos de tiempos grandes las aproximaciones aparentemente son mejores, aun así, nosotros pesamos que esta ponderación no es recomendable para resolver este tipo de ecuación no lineal.

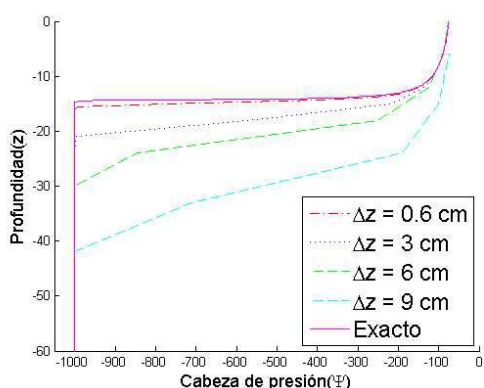
Tabla 2:  
Tabla de errores fijo  $\Delta z = 0.6 \text{ cm}$

$\Delta t(\text{seg})$	Media Aritmética	Media Geométrica	Media Armonica	Media Ascendente
60	1.02	0.49	149.34	3.03
720	1.52	1.06	14.16	3.15
2160	3.58	3.46	3.30	4.03
3240	4.50	4.36	4.20	5.14

Lo dicho anteriormente se puede ver de manera gráfica en las Figuras 7,8 para la media aritmética y geométrica respectivamente y en la Figura 9 para la media armónica



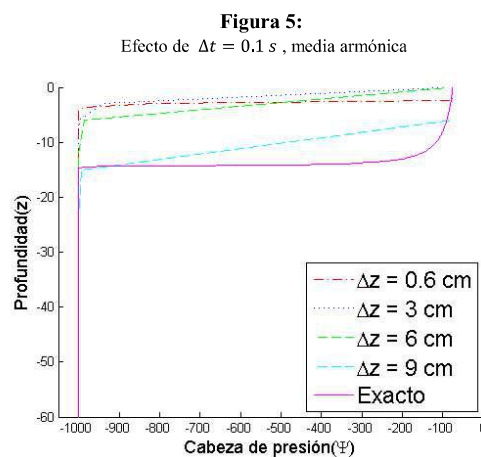
**Figura 3:**  
Efecto de  $\Delta t = 0.1 s$ , media aritmética



Podemos ver que en la Figura 3 que el esquema con la media aritmética es muy sensible al cambio de malla espacial. Es claro que la malla más fina produce un resultado más preciso mientras que si el tamaño de malla es más grueso produce un gran error sobre todo en el frente húmedo, en el caso de la media aritmética este frente húmedo es mucho más rápido.

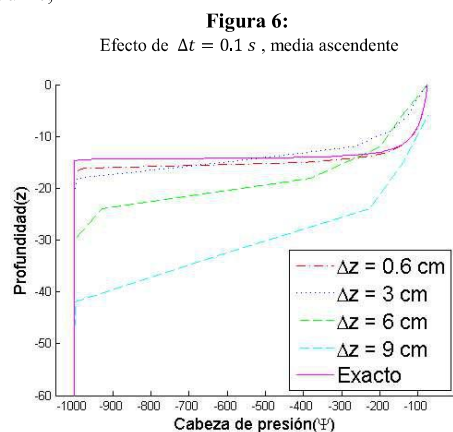
En la Figura 4 y Figura 5 se observa los esquemas con una ponderación geométrica y armónica respectivamente. Al igual que la con la aritmética son muy sensibles al cambio de malla, dado que con tamaños de malla grandes se producen grandes errores por ejemplo con un tamaño de malla de 6 centímetros se producen errores 40.24 y 141.15 respectivamente. En el esquema con la geométrica parece ser que con mallas finas el frente húmedo es más lento mientras que con mallas gruesas este es más rápido en cambio el esquema con la armónica el frente húmedo es más lento es decir se subestimado.

**Figura 4:**  
Efecto de  $\Delta t = 0.1 s$ , media geométrica



**Figura 5:**  
Efecto de  $\Delta t = 0.1 s$ , media armónica

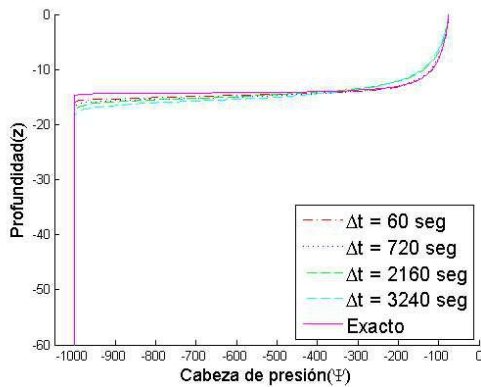
La ponderación con media armónica es la que da los peores resultados en comparación con las otras medias,



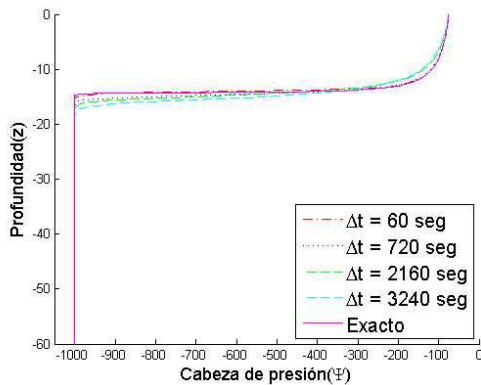
**Figura 6:**  
Efecto de  $\Delta t = 0.1 s$ , media ascendente

**Figura 7:**  
Efecto de  $\Delta z = 0.1$ , media aritmética

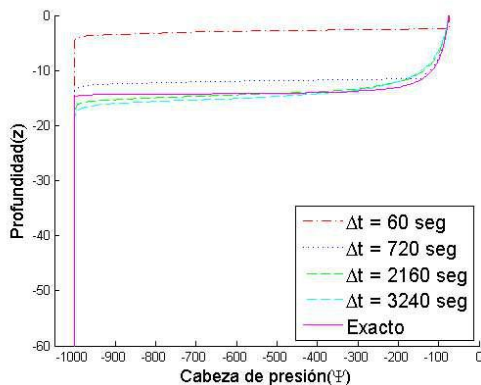
COMPARACIÓN DE ALGUNOS ESQUEMAS IMPLICITOS PARA LA ECUACIÓN DE RICHARDS UNIDIMENSIONAL POR EL MÉTODO DE VOLUMENES FINITOS



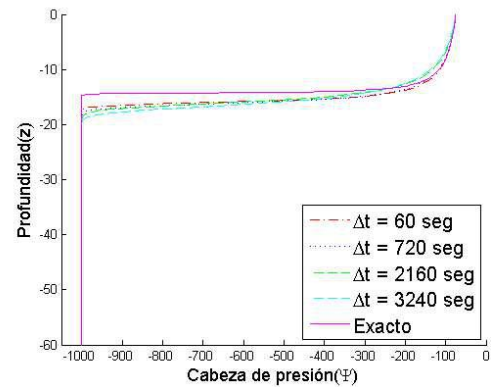
**Figura 8:**  
Efecto de  $\Delta z = 0.1$ , media geométrica.



**Figura 9:**  
Efecto de  $\Delta z = 0.1$ , media armónica



**Figura 10:**  
Efecto de  $\Delta z = 0.1$ , media ascendente



Las Figura 7, Figura 8, y Figura 10 la posición del frente húmedo en general está bien descrita, incluso con grandes pasos de tiempo. El efecto de aumentar el tamaño de malla temporal  $\Delta t$  es que el frente húmedo cambia ligeramente no teniendo un cambio brusco al comparar con la solución de Naula-Albuja ([9]).

## 5. CONCLUSIONES

- (1) Todos los esquemas son sensibles al cambio de malla espacial y producen grandes errores con mallas muy gruesas y por el contrario son muy poco sensibles al cambio de malla temporal
- (2) En términos de exactitud el esquema implícito con la ponderación de la media armónica es el que da peores resultados con grandes errores aun cuando la malla es muy fina por lo que no recomendamos su uso para resolver este tipo de problema.
- (3) La no linealidad de la función de conductividad hidráulica juega un papel importante en la exactitud de los esquemas, ya que ponderaciones diferentes de esta función conducen a esquemas totalmente diferentes. La ponderación de la media aritmética es la que mejor aproxima el problema con valores del error mucho más pequeños que las demás ponderaciones.
- (4) La ponderación de las medias de la conductividad hidráulica es más significativa con mallas muy pequeñas. El tamaño del paso de tiempo no fue un problema crítico en las pruebas de evaluación comparativa y no parece afectar de manera significativa la precisión de las soluciones. Esto lleva a una conclusión práctica: es mejor simular con pasos de tiempo relativamente grandes y mallas espaciales finas que con pequeños pasos de tiempo y con mallas espaciales gruesas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alt, H. L. (1983). Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math*, 183:311-341.
- [2] Buckingham, E. (1907). Studies on the Movement of Soil Moisture. *U.S. Department of Agriculture Bureau of Soils*, 38:28.
- [3] Caviedes-Voullième, D. G. (2013). Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation. *Journal of hydrology*, 480, 69-84.
- [4] Celia, M. A. (1990). A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water resources research*, 26(7), 1483-1496.
- [5] Genuchten, M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils I. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44(5);892-898.
- [6] Lehmann, F. &. (1998). Comparison of iterative methods for improved solutions of the fluid flow equation in partially saturated porous media. *Transport in porous media*, 31(3), 275-292.
- [7] List, F. &. (2016). A study on iterative methods for solving Richards' equation. *Computational Geosciences*, 20(2), 341-353.
- [8] Misiats, O. &. (2013). Second-order accurate monotone finite volume scheme for Richards' equation. *Journal of Computational Physics*, 239, 123-137.
- [9] Naula, I. C. (2016). Modelación y simulación numérica de la Ecuación de Richards para problemas de infiltración. *Enfoque UTE*, 7(1), 46-58.
- [10] Richards, L. A. (1931). Capillary Conduction of Liquids Through Porous Mediums. *Journal of Applied Physics*, 1:318-333.
- [11] Streeter, V. L. (2000). *Mecánica de los fluidos 9(ED)*. MCGRAW-HILL.