Matemática: Una publicación del FCNM – ESPOL
2018, Vol.16, No.1 **Publicado:2018-04-02**

SOBRE UN MÉTODO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE NÚCLEOS DE TIPO CAUCHY

(ON A METHOD FOR THE CONSTRUCTION OF CAUCHY-TYPE CORES)

Ariza García Eusebio [1]

Resumen: *En este trabajo se estudia un método para construir núcleos de Cauchy asociados a operadores de tipo Cauchy-Riemann. Se establecen condiciones sobre los operadores y distancias no euclidianas, asociadas a los operadores estudiados, para que dicha construcción sea posible. Además, se definen algunos operadores de tipo Cauchy-Riemann para los cuales el método es aplicable y se construyen los núcleos correspondientes para ilustrar el método.*
Palabras Claves: Operador de tipo Cauchy-Riemann, núcleo de Cauchy, distancia no euclidiana, Operador de Laplace, Función analítica.

Abstract: *In this paper we study a method to construct Cauchy's kernels associated to some Cuachy-Riemann type operators. Som conditions are established under the operators and non-Euclidean distances, associated to the studied operators, such that the mentioned construction is possible. In addition, some Cauchy-Riemann type operators are defined for which the method is applicable and the corresponding kernels are constructed to illustrate the method.*
Keywords: Cauchy-Riemann type operator, Cauchy kernel, non-euclidean distance, Laplace operator, analytic function.

Recibido: Marzo 2018
Aceptado: Marzo 2018

1. INTRODUCCIÓN

Dado un operador de Cauchy, o de tipo Cauchy, uno de los objetivos de la teoría de funciones analíticas, o más generalmente, de la teoría de funciones anuladas por el operador en cuestión, es hallar un núcleo de Cauchy asociado a este operador.

Si el operador de segundo orden obtenido, al hacer el producto del operador de Cauchy-Riemann con su conjugado, es elíptico, se puede hallar el núcleo de Cauchy asociado usando la idea de la función de Levi propuesta por Carlo Miranda. Ver [4].

El núcleo de Cauchy permite, entonces, construir fórmulas integrales de tipo Cauchy y de tipo Cauchy-Pompeiu que, luego, ayudan a resolver problemas de valores iniciales y problemas con valores en la frontera. Algunas veces, dependiendo de las condiciones del problema, las soluciones pueden venir dadas en el sentido distribucional.

El propósito de este trabajo es exhibir un método diáfano que permita construir estos núcleos, dado el operador de tipo Cauchy-Riemann y una distancia asociada a este.

[1]*Ariza García Eusebio, Ph.D., Profesor de la Escuela de Ciencias Matemáticas y Tecnología Informática, Yachay Tech; (e_mail: eariza@yachaytech.edu.ec).*

El artículo está configurado de la siguiente manera. En la sección 2 se da la definición de operadores de tipo Cauchy-Riemann. En particular, se recuerda el operador de Cauchy-Riemann clásico del análisis complejo. En la sección 3 se definen las álgebras de Clifford clásicas. En la sección 4 se construyen distancias a partir de formas cuadráticas asociadas a operadores de segundo orden elípticos. En la sección 5 se explica el método para construir núcleos de tipo Cauchy a partir de las distancias de la sección anterior, dando condiciones sobre los operadores y distancias no euclidianas definidas a partir del operador, para que el método sea aplicable. Tanto en la sección 4 como en la sección 5 se dan ejemplos que ilustran estas construcciones. En la sección 6 se usan los resultados de las secciones anteriores para obtener soluciones del operador de Laplace u operadores de tipo Laplace.

2. OPERADOR DE TIPO CAUCHY-RIEMANN

En el plano complejo $\mathbb{C}$ se define el *operador de Cauchy-Riemann* por (ver [2])

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right),$$

y su conjugado por

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right).$$

Así mismo, se dice que una función w, definida en $\mathbb{C}$ con valores en $\mathbb{C}$, es *analítica* si es de clase C^1 y satisface la *ecuación de Cauchy-Riemann*

$$\partial_{\bar{z}} w = 0\,.$$

De las propiedades importantes de este operador se tiene que el operador laplaciano se puede factorizar como

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\partial_x{}^2 + \partial_y{}^2\right) = \frac{1}{4}\Delta .$$

Esta propiedad permite garantizar que toda función analítica w también es armónica, i.e., satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta w = 0 .$$

Además, como veremos más adelante, esta una propiedad que, usualmente, quiere ser preservada al momento de generalizar la teoría del análisis complejo a dimensiones superiores. Ver [5].

El operador de Cauchy-Riemann puede ser generalizado de varias formas. Una posibilidad es mantenerse en el plano complejo y cambiar el operador. Por ejemplo, definimos el operador

$$D_\Psi = \Psi_0 \partial_x + \Psi_1 \partial_y ,$$

llamado *operador de tipo Cauchy-Riemann pesado*, con pesos Ψ_0 y Ψ_1, siendo

$$\Psi_0 = p_0 + i p_1 \ , \ \Psi_1 = q_0 + i q_1 ,$$

y p_0, p_1, q_0, q_1 funciones definidas en $\mathbb{C}$ con valores en $\mathbb{R}$. Ver [1].

En este caso, las funciones w que satisfacen la *ecuación de tipo Cauchy-Riemann pesada*

$$D_\Psi w = 0$$

son llamadas *funciones analíticas pesadas*, con pesos Ψ_0 y Ψ_1. Si el contexto en claro en cuanto a quiénes son los pesos, sólo se dice que w es analítica pesada.

También se define el operador conjugado a D_Ψ por

$$\overline{D_\Psi} = D_{\overline{\Psi}} = \overline{\Psi}_0 \partial_x + \overline{\Psi}_1 \partial_y .$$

Otra forma de generalizar el operador de Cauchy-Riemann $\partial_{\bar{z}}$ es considerar el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$, donde las funciones w están definidas en subconjuntos (usualmente dominios acotados) de $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e., w depende de la variable $x = (x_o, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Aunque w puede tomar valores en espacios de diversas características, para fijar ideas, supondremos que w devuelve valores en el álgebra de Clifford clásica A_n, que definiremos en la próxima sección.

En este caso, el, así llamado, *operador de Cauchy-Riemann generalizado* está dado por

$$D = \partial_0 + \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_i$$

y su *conjugado* por

$$\overline{D} = \partial_0 - \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_i ,$$

donde ∂_i representa la derivación con respecto a la variable x_i, para $i = 0,1,...,n.$

Es posible generalizar aún más este operador, considerando un operador pesado. Por ejemplo, se puede estudiar el operador

$$\partial_\Psi = \Psi_0 \partial_0 + \sum_{i=1}^{n} e_i \Psi_i \partial_i ,$$

donde los pesos son constantes reales, complejas o elementos de A_n.

3. ÁLGEBRAS DE CLIFFORD

Consideremos una base ortonormal $B = \{e_o, e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, por ejemplo, la base canónica. Estamos interesados en definir un producto entre elementos de esta base, de manera tal que se preserven algunas de las propiedades importantes del operador de Cauchy-Riemann definido en el plano complejo.

Una de las propiedades de interés es la

PROPIEDAD 1: $e_i^2 = -1,\ i = 1,2,...,n.$

Esta propiedad preserva aquella del plano complejo donde se pide que el cuadrado de la unidad imaginaria sea igual a -1.

La segunda propiedad que nos interesa preservar es una que nos permite factorizar el operador laplaciano usando D y $\overline{D}$. Más específicamente, queremos poder escribir

$$\overline{D}D = \Delta_{n+1} ,$$

siendo Δ_{n+1} el operador de Laplace en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Debido a que

$$\begin{aligned} D &= \partial_0{}^2 - \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \partial_i^2 - \sum_{i \neq j} e_i e_j \partial_i \partial_j \\ &= \partial_0{}^2 + \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 - \sum_{i \neq j} e_i e_j \partial_i \partial_j \\ &= \Delta_{n+1} - \sum_{i<j} (e_i e_j + e_j e_i) \partial_i \partial_j , \end{aligned}$$

para obtener la factorización deseada, basta con pedir que se cumpla la

PROPIEDAD 2: $e_i e_j + e_j e_i = 0$ para $i \neq j$.

Observe que la propiedad 1 fue usada para hacer el cálculo anterior.

Las propiedades 1 y 2 son llamadas *relaciones de estructura*. Estas relaciones son las que definen el álgebra de Clifford clásica A_n. Formalmente, el álgebra de Clifford clásica A_n es el espacio lineal cuya base es

$\beta_n = \{e_0 = 1, e_1, ..., e_n, e_{12}, e_{13}, ..., e_{1n}, ..., e_{12...n}\}$,

donde $e_{12} = e_1 e_2, e_{13} = e_1 e_3$, etc. Es decir, los elementos de la base son de la forma

$$e_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k} = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_k} ,$$

con

$$0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_k \le n .$$

El producto entre elementos de β_n está gobernado por las relaciones de estructura dadas por las propiedades 1 y 2.

Como A_n es un espacio lineal, cualquier elemento de A_n puede ser escrito como combinación lineal de los elementos de la base. Por tanto, basta con conocer cómo calcular productos entre elementos de la base.

Como una observación importante, debe decirse que el producto en A_n es **no conmutativo** debido a la propiedad 2. Esto genera algunos problemas que no aparecían en el análisis complejo.

Se pueden definir relaciones de estructura más generales y así álgebras de Clifford más generales. Remitimos al lector interesado en profundizar en este tema a [3,5].

Una función $w : \mathbb{R}^{n+1} \to A_n$ se dice que es una función con valores en el álgebra de Clifford A_n. Si una función w de este tipo es de clase C^1 y satisface la *ecuación de Cauchy-Riemann generalizada* $Dw = 0$, decimos que w es una función *monogénica*. El análisis de Clifford es, en esencia, el estudio de las funciones monogénicas.

4. FORMAS CUADRÁTICAS ASOCIADAS Y DISTANCIAS

Consideremos un operador D de tipo Cauchy-Riemann como los anteriores. Cuando calculamos el operador de segundo orden $\overline{D}D$, este tiene una forma cuadrática asociada que, asumiéndola definida positiva, tiene una matriz asociada B invertible, con inversa B^{-1}.

Podemos definir una distancia $\rho(x,0)$, por medio de la fórmula

$$\rho^2(x,0) = xB^{-1}x^t ,$$

siendo $x = (x_o, x_1, ..., x_n)$ y x^t su transpuesta.

Veamos algunos ejemplos de distancias construidas por este medio.

EJEMPLO 2. Sea $D = 2\partial_{\bar{z}}$, donde $\partial_{\bar{z}}$ es el operador de Cauchy-Riemann clásico del análisis complejo definido en la sección 2. Tenemos entonces que

$$\overline{D}D = 4\partial_z \partial_{\bar{z}} = \partial_x{}^2 + \partial_y{}^2 =: \Delta_2 ,$$

cuya forma cuadrática asociada es

$$Q(x, y) = x^2 + y^2$$

y, por tanto, la distancia $\rho(z,0)$ viene dada por

$$\rho^2(z,0) = x^2 + y^2 = z\bar{z} = |z|^2 ,$$

siendo $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C}$.

EJEMPLO 1. Sea A_3 el álgebra de Clifford cuya base es

$$\beta_3 = \{e_0 = 1, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\} .$$

Sean $a = b = 1 + e_{123} = 1 + e_1e_2e_3$, entonces tenemos que

$$a \cdot b = a^2 = 2(1 + e_{123}) = 2a.$$

Notemos con este ejemplo, que existen elementos no invertibles en A_3. En efecto, $a^2 = 2a$ implica que $a = 2$ si a fuera invertible.

EJEMPLO 3. Consideremos ahora el operador pesado $D_\Psi = \Psi_0\partial_x + \Psi_1\partial_y$, donde los pesos son constante complejas. Resulta

$$D_{\overline{\Psi}}D_\Psi = |\Psi_0|^2 \partial_x{}^2 + |\Psi_1|^2 \partial_y{}^2 + 2\langle \Psi_0, \Psi_1 \rangle \partial_x \partial_y ,$$

donde $\langle \Psi_0, \Psi_1 \rangle = p_0q_0 + p_1q_1$ es el producto punto usual. Por lo tanto, la matriz asociada a la forma cuadrática viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} |\Psi_0|^2 & \langle \Psi_0, \Psi_1 \rangle \\ \langle \Psi_0, \Psi_1 \rangle & |\Psi_1|^2 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\rho^2(z,0) = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{r_1^2} - 2\frac{xy\cos\theta}{r_0r_1} \right),$$

donde $r_0 = |\Psi_0|$, $r_1 = |\Psi_1|$ y $0 < \theta < \pi$ es el ángulo formado por Ψ_0 y Ψ_1. Observemos que esta distancia generaliza a la obtenida en el ejemplo anterior, de la misma forma que el operador pesado generaliza al operador de Cauchy-Riemann clásico. En efecto, si $\Psi_0 = 1$, $\Psi_1 = i$ entonces $\theta = \pi/2$ y

$$\rho^2(z,0) = |z|^2 .$$

EJEMPLO 4. Sea D el operador de Cauchy-Riemann generalizado definido en A_n por

$$D = \partial_0 + \sum_{i=1}^{n} e_i \partial_i .$$

Como vimos antes, el operador laplaciano es el que resulta al multiplicar D con su conjugado. Por lo que la distancia $\rho(x,0)$ no es más que la distancia euclidiana usual, esto es,

$$\rho(x,0) = \|x\| .$$

Resultados similares se obtienen al considerar el operador de tipo Cauchy-Riemann pesado en A_n definido en la sección 2.

5. CONSTRUCCIÓN DEL NÚCLEO DE CAUCHY A PARTIR DE LA DISTANCIA

Consideremos un operador de tipo Cauchy-Riemann D definido en $\mathbb{R}^{n+1}$ y una distancia $\rho(x,0)$ asociada a dicho operador. Estamos interesados en construir un candidato a núcleo de Cauchy a partir de esta distancia. Para ello, procedemos como sigue:

Paso 1: Calculamos

$$\overline{D}\rho(x,0)$$

y definimos

$$\boxed{K(x,0)=\rho(x,0)\cdot\overline{D}\rho(x,0)},$$

por lo cual, debido a que $\rho(x,0)$ es una función que devuelve valores reales, se tiene que

$$\boxed{\overline{K}(x,0)=\rho(x,0)\cdot D\rho(x,0)}.$$

Paso 2: En vista de la definición anterior, tenemos que

$$\overline{K}(x,0)\cdot K(x,0)=\rho^2(x,0)\cdot D\rho(x,0)\cdot\overline{D}\rho(x,0).$$

Por lo tanto, si demandamos que

$$\boxed{\overline{K}(x,0)\cdot K(x,0)=\rho^2(x,0)},$$

esto equivale a pedir

$$\boxed{D\rho(x,0)\cdot\overline{D}\rho(x,0)=1}.$$

Paso 3: Definimos, finalmente, la función

$$\boxed{E(x,0)=\frac{1}{\rho^{n+1}(x,0)}\cdot K(x,0)},$$

que es nuestro candidato a núcleo de Cauchy.

Para que $E(x,0)$ sea, efectivamente, núcleo de Cauchy, debemos tener que

$$DE(x,0)=0.$$

Debido a que es una función a valores reales, es fácil ver que

$$\begin{aligned}DE(x,0)&=D\left(\frac{1}{\rho^{n+1}(x,0)}\right)\cdot K(x,0)+\frac{1}{\rho^{n+1}(x,0)}DK(x,0)\\&=-\frac{n+1}{\rho^{n+2}(x,0)}\cdot D\rho(x,0)\cdot K(x,0)+\frac{1}{\rho^{n+1}(x,0)}DK(x,0)\\&=-\frac{n+1}{\rho^{n+2}(x,0)}\cdot\frac{\overline{K}(x,0)}{\rho(x,0)}\cdot K(x,0)+\frac{1}{\rho^{n+1}(x,0)}DK(x,0)\\&=\frac{1}{\rho^{n+1}(x,0)}\big(DK(x,0)-(n+1)\big).\end{aligned}$$

Para lograr que $DE(x,0)=0$, basta, entonces con pedir que

$$DK(x,0)=n+1.$$

Pero $K(x,0)=\rho(x,0)\cdot\overline{D}\rho(x,0)$, por lo que la ecuación anterior equivale a

$$D\rho(x,0)\cdot\overline{D}\rho(x,0)+\rho(x,0)\cdot D\overline{D}\rho(x,0)=n+1.$$

Finalmente, la última ecuación y la condición

$$D\rho(x,0)\cdot\overline{D}\rho(x,0)=1,$$

nos conduce a

$$\boxed{\rho(x,0)\cdot D\overline{D}\rho(x,0)=n}.$$

La última ecuación es, en sí misma, interesante. En efecto, ella dice que, si queremos construir un candidato a núcleo de Cauchy, asociado a D, usando este método, debemos garantizar que el operador de segundo orden $D\overline{D}$ sea un operador real, es decir, que no tenga ninguna parte vectorial o Clifford a menos que estas anulen la distancia $\rho(x,0)$.

Resumiendo el resultado de esta sección, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 1.
Dado un operador de tipo Cauchy-Riemann D en $\mathbb{R}^{n+1}$ y una distancia $\rho(x,0)$ asociada a D, con las propiedades

$$D\rho(x,0)\cdot\overline{D}\rho(x,0)=1,$$

y

$$\rho(x,0)\cdot D\overline{D}\rho(x,0)=n,$$

se tiene que la función

$$E(x,0)=\frac{1}{\rho^{n+1}}\cdot K(x,0),$$

donde

$$K(x,0)=\rho(x,0)\cdot\overline{D}\rho(x,0).$$

Cumple con la ecuación

$$DE(x,0)=0.$$

Es decir, $E(x,0)$ así definida es una función analítica, analítica pesada o monogénica, según sea el caso estudiado.

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 5. Sea $\rho(z,0)$ dada en el ejemplo 2. Entonces,

$$K(z,0)=\rho\cdot\overline{D}\rho=\rho\cdot\partial_z\rho=\overline{z}.$$

Por lo tanto,

$$E(z,0)=\frac{1}{\rho^2}\cdot K(z,0)=\frac{\overline{z}}{\overline{z}z}=\frac{1}{z}.$$

Este es el, bien conocido en el análisis complejo, núcleo de Cauchy clásico.

EJEMPLO 6. Sea $\rho(z,0)$ dado en el ejemplo 3. Tenemos entonces,

$$K(z,0)=\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\overline{\Psi_0}}{r_0}\cdot\left(\frac{x}{r_0}-\frac{y\cos\theta}{r_1}\right)+\frac{\overline{\Psi_1}}{r_1}\cdot\left(\frac{y}{r_1}-\frac{x\cos\theta}{r_0}\right)\right).$$

Así,

$$E(z,0)=\frac{1}{\rho^2}\cdot K(z,0),$$

que puede escribirse como

$$E(z,0)=\frac{1}{\overline{K}(z,0)}=\frac{\sin^2\theta}{\left(\frac{\Psi_0}{r_0}\cdot\left(\frac{x}{r_0}-\frac{y\cos\theta}{r_1}\right)+\frac{\Psi_1}{r_1}\cdot\left(\frac{y}{r_1}-\frac{x\cos\theta}{r_0}\right)\right)}.$$

A este lo llamamos *núcleo de Cauchy pesado*, con pesos Ψ_0 y Ψ_1.

EJEMPLO 7. Como último ejemplo de esta sección, consideremos $\rho(x,0)=\|x\|$ dado por el ejemplo 4. En este caso, obtenemos

$$K(x,0)=\rho\cdot\overline{D}\rho=x_0-\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\overline{x},$$

por lo que

$$E(x,0)=\frac{1}{\rho^{n+1}(x,0)}\cdot K(x,0)=\frac{\overline{x}}{\|x\|^{n+1}}.$$

Este es conocido como *núcleo de Cauchy generalizado* en A_n.

6. OPERADOR DE LAPLACE GENERALIZADO Y SOLUCIÓN FUNDAMENTAL

En esta sección continuamos con la notación de la sección anterior y consideramos el operador de segundo orden $D\overline{D}$. Tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2. Sea L la función definida por

$$\boxed{L(x,0)=\frac{1}{(1-n)\rho^{n-1}(x,0)}}.$$

Entonces

$$\Delta_{n+1}L(x,0)=D\overline{D}L(x,0)=0.$$

Es decir, L satisface la ecuación de tipo Laplace. Por lo que ella es armónica, armónica pesada, armónica generalizada, etc, según sea el caso.

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar este resultado basta con notar que

$$\overline{D}L=-\frac{(n-1)}{(1-n)\rho^n}\cdot\overline{D}\rho=\frac{1}{\rho^{n+1}}K=E,$$

por lo que

$$D\overline{D}L(x,0)=DE(x,0)=0.$$

□

Tenemos entonces, también, la forma de construir soluciones del operador tipo laplaciano $D\overline{D}$. Más aún, se puede ver que L es una solución fundamental de $D\overline{D}$ en el sentido de Miranda (ver [4]), lo cual, entre otras cosas, permite construir una fórmula integral de tipo Poisson. Ver [2].

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 8. Sea $\rho(z,0)$ dada en el ejemplo 2. Entonces, $n=2$ y

$$L(z,0)=-\frac{1}{\rho(z,0)}=-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}=\frac{1}{|z|}.$$

EJEMPLO 9. Sea $\rho(z,0)$ dada en el ejemplo 3. Al igual que antes, $n=2$ y

$$L(z,0)=-\frac{1}{\rho(z,0)}=-\frac{\sin\theta}{\left(\frac{x^2}{|\Psi_0|^2}+\frac{y^2}{|\Psi_1|^2}-2\frac{xy\cos\theta}{|\Psi_0||\Psi_1|}\right)^{1/2}}$$

asumiendo que $0<\theta<\pi$.

EJEMPLO 10. Finalmente, consideremos $\rho(x,0)=\|x\|$ dado por el ejemplo 4. Entonces tenemos

$$L(x,0)=\frac{1}{(1-n)\rho^{n-1}}=\frac{1}{(1-n)\|x\|^{n-1}}.$$

OBSERVACIÓN: Notemos que, en esta sección, la construcción de L se hace a partir de la distancia ρ. En la demostración del Teorema 2 se exhibe el hecho de que es posible definir E a partir de L. En efecto, se define E como $\overline{D}L$.

Sin embargo, al proceder de esta forma no se garantiza que E satisface la ecuación $DE(x,0)=0$. Hecho este que sí es garantizado con la construcción de E tal como lo hicimos. Esa es una de las razones por las que procedimos de esta manera.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló un método, paso por paso, para construir núcleos de tipo Cauchy, dado un operador de tipo Cauchy y una distancia ρ asociada a dicho operador. Se mostró también cómo construir esta distancia asociada. Por otro lado, con el fin de ilustrar el método, se dieron varios ejemplos.

Es interesante notar que el método para construir núcleos de tipo Cauchy, que hemos exhibido en este trabajo, funciona aún en el caso en que el operador tenga coeficientes pesados. Sin embargo, estos pesos deben ser, en general, constantes. En el caso de pesos variables, el panorama se complica, y el método no funciona tal cual está descrito, puesto que es necesario calcular, también, las derivadas de los pesos. Esto implica que, para construir el núcleo de tipo Cauchy, deban resolverse ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

A pesar de no funcionar en este último caso, el método ayuda a entenderlo. Por lo cual consideramos que este no es útil solamente en el primer caso sino que también lo es en otros de mayor complejidad. Además, este método no se limita solamente al caso complejo o a las álgebras de Clifford clásicas, incluyendo, claro está, a los cuaterniones, sino que también es válido en otros casos. Por ejemplo, en las, así llamadas, álgebras de Clifford con parámetros. Ver [5].

Por otro lado, vale decir que el método no solamente ayuda en la construcción de núcleos de tipo Cauchy, sino que, como se muestra en la sección 6, también ayuda a conseguir soluciones del operador de Laplace o de tipo Laplace. Esto también ayuda en el estudio de ecuaciones de segundo orden.

REFERENCIAS BLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. **ARIZA, E., DI TEODORO A. AND VANEGAS, C.** Weighted-Cauchy-Riemann operators and some associated Integral Representations. Accepted for publication.

[2]. **BEGEHR, H.** Complex Boundary Value Problems in Complex analysis I. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. 1 (2005), 65-85.

[3]. **BRACKX, F., DELANGHE, R. AND SOMMEN, F.** (1982). "*Clifford Analysis".* Pitman Publishers. Boston – USA.

[4]. **MIRANDA, C.** (1970). "*Partial Differential Equations of Elliptic type*". Springer-Verlag. Berlin.

[5]. **VANEGAS, C. AND TUTSCHKE, W.** (2008). "*Métodos del análisis complejo en dimensiones superiores*". Ediciones IVIC. Caracas-Venezuela.