

INICIOS DE UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE LAS APLICACIONES REALES CUADRÁTICAS DEL PLANO PARTE 1

BEGINNINGS OF A TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF THE REAL QUADRATIC APPLICATIONS OF THE PLANE PART 1

Córdova Nelson¹

Resumen. El presente artículo tiene por objetivo mostrar un camino para estudiar como acercarse a establecer parte de una clasificación topológica de la familia de aplicaciones reales cuadráticas en el plano a través de la clasificación presentada por Guillermo Gómez Alcaraz y López de Medrano. Ellos establecieron una clasificación mediante conjugación a fin de esta familia en 21 clases de equivalencia, donde cualquier elemento de esta familia pertenece a una de estas clases, y además la dinámica de cualquiera de ellas está determinada por la dinámica de un representante de la clase compuesta con una aplicación afín invertible. Es decir, al estudiar la dinámica de esta última composición estaremos estudiando la dinámica de las aplicaciones reales cuadráticas en el plano, disminuyendo el número de parámetros dramáticamente a 6. [2] En este primer artículo se muestra el estudio para la clase F_5 en su primera parte en la que se muestra que es posible establecer primeramente el número total de puntos fijos que se pueden encontrar en esta familia.

Palabras clave: Dinámica, conjugación afín, puntos fijos, parámetros

Abstract. The present article aims to illustrate a study method on how to approach topological classifications in the family of real quadratic applications through the classification presented by Guillermo Gómez Alcaraz and López de Medrano. In which the author established a classification by conjugating a family into 21 equivalence classes, where each element of this family belongs to one of these classes. In addition, the dynamic of any of them is determined by the dynamic of a representative of the class composed with an invertible related application. In other words, to study the dynamics of this last composition, to study the dynamics of real quadratic applications on the plane, and to dramatically reduce the number of parameters to 6. [2] In this first article, we illustrate the study for the class F_5 in its first part in which it shows that it is possible to establish first the total number of fixed points that can be found in this family.

Key words: Dynamics, related conjugation, fixed points, parameters

Recibido: Agosto 2017

Aceptado: Septiembre 2017

1. INTRODUCCIÓN

En [2] se presentó una clasificación general de las aplicaciones reales cuadráticas en el plano, la cual fue hecha mediante una relación de equivalencia usando aplicaciones afines invertibles. En esa oportunidad se mostró que dicha clasificación no es suficiente para el estudio de la dinámica de estas aplicaciones, pues para ello se necesita clasificar por conjugación. La clasificación presentada allí, muestra 21 clases de equivalencia con sus respectivas representantes, F_i ; $i = 1, \dots, 21$, lo que permitió mostrar que “cada aplicación real cuadrática en el plano es afinmente conjugada con una aplicación de la forma $A \circ F_i$, donde $A(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$, $ad - bc \neq 0$, es una aplicación afín invertible y F_i es una de las 21 aplicaciones antes mencionadas. Es decir: En [1] se estudió $A \circ F_{17}(x, y) = (a(x^2 - y^2) + e, c(x^2 - y^2) + f)$, mostrando una clasificación simple, la cual se redujo al estudio de una dinámica unidimensional conocida.

Recordemos que dos aplicaciones f y g son afinmente equivalentes sí y sólo sí existen aplicaciones afines invertibles A_1 y A_2 tales que $f = A_1^{-1} \circ g \circ A_2$. Se dirá que f y g son afinmente conjugadas sí: $A_1 = A_2$, es decir:

COROLARIO: Cada aplicación real cuadrática de x^2 es afinmente conjugada a una aplicación de la forma: $A \circ F_i$ con $i = 1, 2, 3, \dots, 21$. Donde A es una aplicación afín invertible y F_i es una de las 21 aplicaciones del teorema.

Demostración: Si f es una aplicación real cuadrática del plano, entonces por el teorema tenemos que existen A_1 y A_2 aplicaciones afines invertibles tales que: $f = A_1^{-1} \circ F_i \circ A_2$, para algún i .

Donde podemos escribir

$$f = A_2^{-1} \circ (A_2 \circ A_1^{-1} F_i) \circ A_2^{-1}$$

Donde $A_2 \circ A_1^{-1} = A$ es una aplicación afín invertible.

Estudiar para cada una de estas $A \circ F_i$ su dinámica, se estará estudiando una gran gama de aplicaciones reales cuadráticas del plano que tienen la misma dinámica, es interesante además estudiar cuando dos de estas $A_1 \circ F_i$ o $A_2 \circ F_i$ son conjugadas.

¹Córdova Nelson, Docente, Universidad Santa María Campus Guayaquil, Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL); (e-mail: cordova@espol.edu.ec).

2. DISMINUCIÓN DE PARÁMETROS PARA $A \circ F_5$

Dentro de la clasificación existente de las aplicaciones cuadráticas en el plano, representadas por 21 aplicaciones, las que habíamos denominado por F_i , $i = 1, \dots, 21$, Consideremos F_5 , donde $F_5(x, y) = (x^2, y^2)$. Además se hizo notar en este trabajo que para el estudio de la dinámica de estas aplicaciones, no es suficiente esta clasificación por lo que debemos considerar las aplicaciones afines invertibles de la forma $A(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$; $ad - bc \neq 0$ con a, b, c, d, e, f , parámetros reales. Además podemos hacer que $ad - bc = \pm 1$ componiendo A con la dilatación $D(x, y) = (kx, ky)$ con $k = |ad - bc|^{-\frac{1}{2}}$. Ahora nos limitaremos a estudiar la aplicación $A \circ F_5$ y hacer una clasificación Topológica de esta

clase. A saber: $A \circ F_5(x, y) = (ax^2 + by^2 + e, cx^2 + dy^2 + f)$; $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Cuando hacemos conjugación afín tenemos que las curvas de nivel de las aplicaciones Jacobiano de f y Traza de f son preservadas, en efecto, la aplicación $\Delta(x, y) = (Jf(x, y), Tr(Df(x, y)))$, es invariante bajo conjugación afín. [1] Por lo tanto, cabe considerar dos casos, $Tr(Df)$ no es la aplicación nula o $Tr(Df)$ es idénticamente nula.

a) Para el primer caso tenemos $Tr(D(A \circ F_5)(x, y)) = 2ax + 2dy$ y como las curvas de nivel deben preservarse mediante conjugación afín, conjugado con una rotación podemos hacer verticales las curvas de nivel lo que implica que d puede ser cero [1]. Para esto sea: $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$, componiendo con $A \circ F_5$ tenemos:

$$\begin{aligned} A \circ F_5 \circ R_\theta(x, y) &= \\ &= \left[a(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + b(x \sin \theta + y \cos \theta)^2 + e, c(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + d(x \sin \theta + y \cos \theta)^2 + f \right] \\ &= \left[ax^2 + by^2 + e + \sin \theta (b - a)(\sin \theta (x^2 - y^2) + 2xy \cos \theta), cx^2 + dy^2 + f + \sin \theta (d - c)(\sin \theta (x^2 - y^2) + 2xy \cos \theta) \right] \end{aligned}$$

Ahora aplicamos:

$$R_{-\theta} \circ R_\theta \circ (A \circ F_5) \circ R_\theta(x, y) = [F_1(x, y), F_2(x, y)] \text{ con:}$$

$$F_1(x, y) = \left[(\cos \theta \{ ax^2 + by^2 + e + \sin \theta (b - a)(\sin \theta (x^2 - y^2) + 2xy \cos \theta) \} + \sin \theta \{ cx^2 + dy^2 + f + \sin \theta (d - c)(\sin \theta (x^2 - y^2) + 2xy \cos \theta) \}) \right]$$

y

$$F_2(x, y) = \left[-\sin \theta \{ ax^2 + by^2 + e + \sin \theta (b - a)(\sin \theta (x^2 - y^2) + 2xy \cos \theta) \} + \cos \theta \{ cx^2 + dy^2 + f + \sin \theta (d - c)(\sin \theta (x^2 - y^2) + 2xy \cos \theta) \} \right]$$

De donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \cos \theta [2ax + \sin^2 \theta (b - a)2x + 2\sin \theta \cos \theta (b - a)y] + \\ &\quad + \sin \theta [2cx + \sin^2 \theta (d - c)2x + 2\sin \theta \cos \theta (d - c)y] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial y} &= -\sin \theta [2by - \sin^2 \theta (b - a)2y + 2\sin \theta \cos \theta (b - a)x] + \\ &\quad + \cos \theta [2dy - \sin^2 \theta (d - c)2y + 2\sin \theta \cos \theta (d - c)x] \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = hx + ky \text{ (traza de } J(A \circ f))$$

Queremos hallar θ tal que $k = 0$

$$2\sin \theta \cos^2 \theta (b - a) + 2\sin^2 \theta \cos \theta (d - c) - 2\sin \theta b + 2\sin^3 \theta (b - a) + 2\cos \theta d - 2\sin^2 \theta \cos \theta (d - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \theta (b - a)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2(d \cos \theta - b \sin \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\theta[b-a-b]+d \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow a \text{sen}\theta + d \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}} \text{sen}\theta + \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}} \cos \theta = 0$$

Sea $\theta' \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}\theta' = \frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}}$ y $\cos\theta' = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}$

Es decir $\theta' = \arctg\left(\frac{d}{a}\right)$ y $\text{Sen}(\theta+\theta')=0$ entonces $\theta + \theta' = k\pi, k \in \mathbb{R}$

Luego basta con tomar $\theta = k\pi - \arctg\left(\frac{d}{a}\right)$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

Después de esto podemos asumir que $d = 0$. Por convención, seguiremos escribiendo la aplicación de $A \circ F_5(x, y)$, aún después de hacer conjugaciones. La siguiente aplicación se nos reduce a este primer caso donde $\text{Tr}J(A \circ F_5) \neq 0$ a lo siguiente:

$$A \circ F_5(x, y) = (ax^2 + by^2 + e, \pm \frac{1}{b}x^2 + f), \quad b \neq 0$$

vemos que los 6 parámetros los hemos reducido a 4, para poder inferir la riqueza de la dinámica del caso de 6 parámetros, veremos lo que nos ofrece el caso con 4. Pasemos al segundo caso en que $\text{Tr}J(A \circ F_5) \equiv 0$.

b) Si $\text{Tr}J(A \circ F_5) \equiv 0$, entonces $a = d = 0$ y como $ad - bc = \pm 1$ tenemos, luego $A \circ F_5(x, y) = (by^2 + e, \pm b^{-1}x^2 + f)$, $b, e, f \in \mathbb{R}, b \neq 0$ conjugando con el homeomorfismo $h(x, y) = (x, b^{-1}y)$, tenemos:

$$A \circ F_5(x, y) = (b^{-1}y^2 + e, \pm x^2 + bf), \quad b \neq 0$$

Sea $A \circ F_5(x, y) = (b^{-1}y^2 + e, \pm x^2 + bf)$, $b \neq 0$ En el estudio de sus puntos fijos, esto es: $A \circ F_5(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow (b^{-1}y^2 + e, \pm x^2 + bf) = (x, y)$ [4]

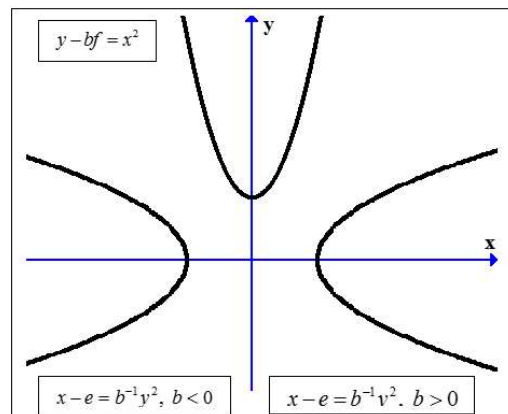
Lo que nos lleva a resolver el siguiente sistema:

$$1) x - e = \frac{1}{b}y^2 \quad 2) (y - bf) = x^2$$

Este sistema nos lleva a resolver una ecuación 4to. grado, lo que dificulta la clasificación. Pero podemos mirar este sistema gráficamente, como la intersección de dos parábolas, una con lado

recto fijo y otro con lado recto variable. En dos distintos casos para $b < 0$ y $b > 0$.

Figura 1:
Sistema caso $\text{Tr}J(A \circ F_5) \equiv 0$



3. CLASIFICACIÓN DEL NÚMERO DE PUNTOS FIJOS

En la figura se muestra esta interpretación, donde las flechas indican los posibles “movimientos” de las parábolas. Las flechas verticales y horizontales indican el desplazamiento de las parábolas, y las flechas oblicuas indican como varía la figura de la parábola del lado recto variable. Este movimiento depende de cómo varía el parámetro b. La situación queda como en el siguiente cuadro:

Tabla 1.
Puntos fijos caso
 $bf < 0$

		$bf < 0$	
		$b < 0 \wedge f > 0$	$b > 0 \wedge f < 0$
$e < 0$	$e < -\sqrt{ bf }$	$e \leq -\sqrt{ bf }$	
	1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos (atractores)	1.- 2 puntos fijos 2.- 3 puntos fijos 3.- 4 puntos fijos	
	$e \geq -\sqrt{ bf }$	$e > -\sqrt{ bf }$	
	2 puntos fijos	1.- 2 puntos fijos 2.- 3 puntos fijos	
$e = 0$		2 puntos fijos	2 puntos fijos
$e > 0$	$e < \sqrt{ bf }$	$e \leq \sqrt{ bf }$	
	1.- 2 puntos fijos 2.- 3 puntos fijos (atractores)	2 puntos fijos (1 atractor)	
	$e \geq \sqrt{ bf }$	$e > \sqrt{ bf }$	
	1.- 2 puntos fijos 2.- 3 puntos fijos 3.- 4 puntos fijos	1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos	
		$e = \sqrt{ bf }$	
		2 puntos fijos	

Tabla 2.
Puntos fijos caso
 $bf = 0$

		$bf = 0$	
		$b > 0 \wedge f = 0$	$b < 0 \wedge f = 0$
$e < 0$	*gráfico 1 2 puntos fijos	*gráfico 2 1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos	
$e = 0$	2 puntos fijos	2 puntos fijos	
$e > 0$	*gráfico 3 1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos	*gráfico 4 2 puntos fijos	

Tabla 3.
Puntos fijos caso
 $bf > 0$

		$bf > 0$	
		$b > 0 \wedge f > 0$	$b < 0 \wedge f < 0$
$e < 0$	$e \leq -(bf)^2$		1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos
	2 puntos fijos		
	$e > -(bf)^2$		
	1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos		
$e = 0$		1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos	1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos
$e > 0$	1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos		$e < (bf)^2$
			1.- 0 punto fijo 2.- 1 punto fijo 3.- 2 puntos fijos (atractores)
			$e \geq (bf)^2$
			2 puntos fijos

4. CASO EXACTAMENTE UN PUNTO FIJO

En cada caso podemos determinar qué tipo de punto fijo tenemos, pero más importante en este momento es determinar para cuales $b \in \mathbb{R}^*$ tenemos 0,1,2 puntos fijos, o 2,3,4 puntos fijos, para así disminuir el número de clases de conjugación.

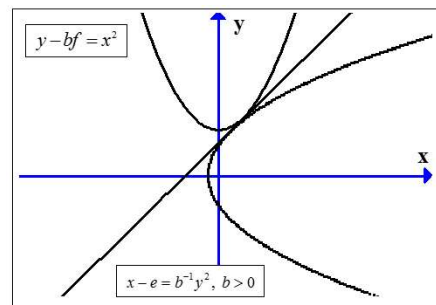
A continuación, ilustramos lo anteriormente dicho.

Estudiemus el caso en que:

$bf = k > 0$, $e < 0$ (Fijo), lo variable ($b > 0$)

Queremos averiguar para que $\frac{b}{e}$ tenemos exactamente un punto fijo (x_0, y_0)

Figura 2.
Sistema caso un punto fijo



Considerando:

a) $y - k = x^2$

b) $b(x - e) = y^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = 2x \\ y' = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{x-e}} \end{cases}$$

$$2x_0 = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{x_0-e}} \Rightarrow \boxed{b = 16x_0^2(x_0 - e)} \quad (1)$$

Además $b = \frac{y_0^2}{x_0 - e}$ implica que

$$y_0^2 = 16x_0^2(x_0 - e)^2$$

$$\therefore \boxed{y_0 = 4x_0(x_0 - e)} \quad (2)$$

Como $k = bf$ es un valor fijo, tenemos que $f = kb^{-1}$

Luego: $b = \frac{-x_0^2 + y_0}{kb^{-1}} \Rightarrow \boxed{k = -x_0^2 + y_0}$

Ahora:

$$y_0 = x_0^2 + k$$

$$y_0 = 4x_0(x_0 - e) \Rightarrow x_0^2 + k = 4x_0^2 - 4x_0e$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{+4e \pm \sqrt{16e^2 + 12k}}{6} = \frac{2e \pm \sqrt{4e^2 + 3k}}{3}$$

Donde x_0 está bien definido.

Luego obtenemos:

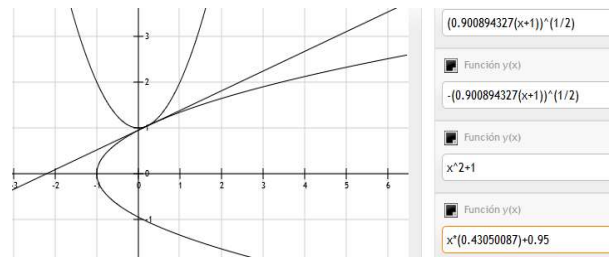
$$b_0 = \frac{16(2e + \sqrt{4e^2 + 3k})^2}{9} \cdot \frac{(2e + \sqrt{4e^2 + 3k} - 3e)}{3}$$

Pero en el caso de ii) $b = b_0$ \therefore la clase para el cual $A \circ F_5$ tiene un punto fijo es con b_0 , en el caso i) si $b > b_0$ se tienen dos puntos fijos y si $b < b_0$ no hay puntos fijos.

\therefore Con lo anterior obtenemos 3 clases diferentes con:

$$b_0 = \frac{16(2e + \sqrt{4e^2 + 3k})^2}{9} \cdot \frac{(2e + \sqrt{4e^2 + 3k} - 3e)}{3}$$

Figura 3.
Gráfica de funciones.



Caso $e = -1 \wedge k = 1 \Rightarrow b = 0.900894327$ y p. fijo $= (0.21525044, 1.04633275)$

Tenemos entonces tres clases definidas

$$b > b_0, \quad b = b_0, \quad b < b_0$$

El siguiente paso es determinar el carácter de los puntos fijos, establecer aproximadamente su dinámica y determinar cuáles son topológicamente equivalentes.

Para el caso de cuatro parámetros, $TrJ(A \circ F_5) \neq 0$, es un poco más complicado, puesto que para el estudio de los puntos fijos aparecen todo tipo de figuras cónicas, dependiendo por supuesto de los distintos parámetros.

5. CONCLUSIONES

Como podemos observar, el estudio de la clasificación topológica de las 21 clases de equivalencia afín de las aplicaciones reales cuadráticas, está en sus inicios. Sin embargo, es posible continuar con la investigación, comenzando, por ejemplo, por determinar el carácter de los puntos fijos hiperbólicos, las órbitas periódicas hiperbólicas y los conjuntos invariantes con sus elementos dinámicos, para así poder describir los diferentes tipos de dinámicas e interacciones que pueden ir apareciendo. En este caso $A \circ F_5$, es bien interesante poder analizar, debido a la cantidad de puntos fijos, lo cual debe reflejar en parte, cómo podría ser el comportamiento de las clases que aún no han sido investigadas, ya que existe la posibilidad que dentro del análisis de $A \circ F_5$ estén albergadas la dinámicas de muchas de ellas [5].

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS Y ELECTRONICAS

- [1]. **Córdova, nelson.** *En búsqueda de dinámicas de aplicaciones en el plano: " iteraciones de aplicaciones reales cuadráticas en el plano".* Matemática. Vol 13 nro 1, 11-19. 2015
- [2]. **Devaney, robert I.** *Introduction to chaotic dynamical systems* (2ed) ed. Addison-wesley boston, 1989.
- [3]. **Gómez, g., & lopez de medrano, s.** *Iterations of quadratic mappings on de plane.* Facultad de ciencias matemáticas UNAM, 6-7. 1988
- [4]. **ROMERA, MIGUEL;** *técnica de los sistemas dinámicos discretos,* Consejo Superior de Investigaciones Científicas España 1997. ISBN 8400-07667-2.
- [5]. **LACOMBA, ERNESTO.** *Los sistemas dinámicos que son y para qué sirven?* Miscelánea Matemática 32.UNAM, 39-50.2000.