Matemática: Una publicación de FCNM - ESPOL
2017, Vol.15, No. 2 **Publicado: 2017-10-02**

LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

LINEARIZATION OF EINSTEIN'S FIELD EQUATIONS

Wilson P. Álvarez Samaniego[1], Borys Álvarez Samaniego[2], Douglas Moya Álvarez[3]

Resumen: *A partir de las ecuaciones de campo de Einstein, en una aproximación de campos débiles y para velocidades mucho menores que la velocidad de la luz en el vacío, se obtiene el siguiente sistema*

$$\begin{cases} \nabla \times \overrightarrow{E_g} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{B_g}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \overrightarrow{E_g} \approx -4\pi G \rho_g , \\ \nabla \times \overrightarrow{B_g} \approx -\dfrac{4\pi G}{c^2}\overrightarrow{J_g} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{E_g}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B_g} = 0, \end{cases}$$

donde $\overrightarrow{E_g}$ es el campo gravitoeléctrico, $\overrightarrow{B_g}$ es el campo gravitomagnético, $\overrightarrow{J_g}$ es la densidad de corriente de masa-espacio-tiempo y ρ_g es la densidad de masa-espacio-tiempo. Este conjunto de relaciones de campos gravitoelectromagnéticos es análogo a las ecuaciones de Maxwell, lo cual muestra una similitud entre la teoría electromagnética y la gravitación.

Palabras Claves: Campo gravitoeléctrico, campo gravitomagnético, ecuaciones de campo de Einstein, ecuaciones de Maxwell, relatividad general.

Abstract. *From the Einstein field equations, in a weak-field approximation and for speeds small compared to the speed of light in vacuum, the following system is obtained*

$$\begin{cases} \nabla \times \overrightarrow{E_g} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{B_g}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \overrightarrow{E_g} \approx -4\pi G \rho_g , \\ \nabla \times \overrightarrow{B_g} \approx -\dfrac{4\pi G}{c^2}\overrightarrow{J_g} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \overrightarrow{E_g}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B_g} = 0, \end{cases}$$

where $\overrightarrow{E_g}$ is the gravitoelectric field, $\overrightarrow{B_g}$ is the gravitomagnetic field, $\overrightarrow{J_g}$ is the space-time-mass current density and ρ_g is the space-time-mass density. This last gravitoelectromagnetic field system is similar to the Maxwell equations, thus showing an analogy between the electromagnetic theory and gravitation.

Key words and phrases: Gravitoelectric field, gravitomagnetic field, Einstein's field equations, Maxwell's equations, general relativity.

Recibido: Septiembre 2017
Aceptado: Septiembre 2017

1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a la ley de gravitación universal de Newton y la ley clásica de la conservación de la masa, se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho, \tag{1.1}$$
$$\nabla \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = 0, \tag{1.2}$$

donde $\vec{g}$ es el vector *aceleración de la gravedad*, G es la *constante gravitacional de Cavendish*, ρ es la *densidad de masa* y $\vec{J}$ es la *densidad de corriente de masa* con $\vec{J} = \rho\, \vec{v}$, siendo $\vec{v}$ la *velocidad de desplazamiento de la materia.* Despejando ρ de (1.1), se obtiene

$$\rho = -\frac{\nabla \cdot \vec{g}}{4\pi G}.$$

Reemplazando la expresión anterior en (1.2), y suponiendo que el campo vectorial $\vec{g}$ es dos veces diferenciable, se ve que

$$\nabla \cdot \vec{J} - \frac{1}{4\pi G}\nabla \cdot (\partial_t \vec{g}) = 0.$$

Luego,

[1] *Wilson P. Álvarez Samaniego, Núcleo de Investigadores Científicos, Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática, Universidad Central del Ecuador (UCE), Quito, Ecuador; (e-mails: wpalvarez@uce.edu.ec, alvarezwilson@hotmail.com).*

[2] *Borys Álvarez Samaniego, Núcleo de Investigadores Científicos, Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática, Universidad Central del Ecuador (UCE), Quito, Ecuador;*
(e-mails: balvarez@uce.edu.ec, borys_yamil@yahoo.com).

[3] *Douglas Moya Álvarez, Núcleo de Investigadores Científicos, Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática, Universidad Central del Ecuador (UCE), Quito, Ecuador.*

$$\nabla\cdot\left(\vec{J}-\frac{1}{4\pi G}\partial_t\vec{g}\right)=0.$$

Usando el Lema de Poincaré, en subconjuntos abiertos contractibles, se tiene que la expresión dentro del paréntesis en la igualdad anterior proviene del rotacional de un campo vectorial, que por conveniencia se lo escribe como

$$-\frac{c^2\overrightarrow{B_g}}{4\pi G},$$

donde c es la *velocidad de la luz en el vacío* y $\overrightarrow{B_g}$ se denomina *campo gravitomagnético*. Luego,

$$-\nabla\times\left(\frac{c^2\overrightarrow{B_g}}{4\pi G}\right)=\vec{J}-\frac{1}{4\pi G}\partial_t\vec{g}. \qquad (1.3)$$

Finalmente,

$$\nabla\times\overrightarrow{B_g}=-\frac{4\pi G}{c^2}\vec{J}+\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{g}. \qquad (1.4)$$

La ecuación (1.4) es análoga a la Ley de Maxwell-Ampère de la Electrodinámica Clásica dada por

$$\nabla\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}=\overrightarrow{J_e}+\varepsilon_0\partial_t\vec{E},$$

donde $\vec{B}$ es el *campo de inducción magnético,* μ_0 es la *permeabilidad magnética del vacío,* $\overrightarrow{J_e}$ es la *densidad de corriente,* ε_0 es la *permitividad eléctrica del vacío* y $\vec{E}$ es el *campo eléctrico.*

Se observa ahora que las ecuaciones gravitacionales (1.1) y (1.4), es decir

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{g}=-4\pi G\rho,\\ \nabla\times\overrightarrow{B_g}=-\frac{4\pi G}{c^2}\vec{J}+\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{g}\end{cases} \qquad (1.5)$$

son análogas a las ecuaciones de Gauss y de Maxwell-Ampère, respectivamente, de la Electrodinámica Clásica

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_e}{\varepsilon_0},\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\overrightarrow{J_e}+\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E},\end{cases} \qquad (1.6)$$

donde ρ_e es la *densidad volumétrica de carga y* $\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}$.

Considerando la existencia de ondas gravitacionales ([4]), se tiene que

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{g}=-\partial_t\overrightarrow{B_g},\\ \nabla\cdot\overrightarrow{B_g}=0.\end{cases} \qquad (1.7)$$

Las dos ecuaciones en el sistema (1.7) son similares a la ley de Faraday y a la ausencia de monopolos magnéticos de la Electrodinámica Clásica, dadas por

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B},\\ \nabla\cdot\vec{B}=0.\end{cases} \qquad (1.8)$$

Así, juntando (1.5) y (1.7), los campos $\vec{g}$ y $\overrightarrow{B_g}$ quedan completamente descritos en la Mecánica Newtoniana, a nivel no relativista, por el siguiente sistema de cuatro ecuaciones tipo Maxwell.

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{g}=-\partial_t\overrightarrow{B_g},\\ \nabla\cdot\vec{g}=-4\pi G\rho,\\ \nabla\times\overrightarrow{B_g}=-\frac{4\pi G}{c^2}\vec{J}+\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{g},\\ \nabla\cdot\overrightarrow{B_g}=0.\end{cases} \qquad (1.9)$$

Aplicando el rotacional a la tercera ecuación de (1.9), suponiendo que $\vec{g}$ es dos veces diferenciable y considerando la primera y cuarta ecuaciones de dicho sistema, se obtiene la siguiente ecuación hiperbólica para el campo $\overrightarrow{B_g}$:

$$\Delta\overrightarrow{B_g}=\frac{4\pi G}{c^2}\nabla\times\vec{J}+\frac{1}{c^2}\partial_t^2\overrightarrow{B_g}. \qquad (1.10)$$

Procediendo de forma similar a lo realizado para obtener (1.10), pero aplicando esta vez el rotacional a la primera ecuación de (1.9), suponiendo ahora que el campo $\overrightarrow{B_g}$ es dos veces diferenciable y tomando en cuenta la segunda y tercera ecuaciones de (1.9), se consigue nuevamente una ecuación de tipo hiperbólico para el campo $\vec{g}$ dada por

$$\Delta\vec{g}=-4\pi G\left(\nabla\rho+\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{J}\right)+\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{g}. \qquad (1.11)$$

La NASA comprobó experimentalmente el efecto de $\overrightarrow{B_g}$ ([1,2]). Se colocó un sistema de satélites en órbita alrededor de la Tierra, con los ejes de sus respectivos giroscopios apuntando hacia una estrella distante de referencia. Debido a que los giroscopios están libres de fuerzas externas, sus ejes deberían continuar apuntando hacia la estrella por siempre. Sin embargo, el cambio en la curvatura del espacio, debido a la rotación de la Tierra, implica que las direcciones a las que apuntan los ejes de los giroscopios deben cambiar con el paso del tiempo. Estos cambios de direcciones relativos a la estrella fija de referencia permiten medir la variación en la curvatura del espacio-tiempo generado por la rotación de la Tierra.

En la Sección 2 se linealiza las ecuaciones de campo de Einstein en la aproximación no relativista para campos gravitatorios débiles, obteniéndose así el sistema de relaciones tipo Maxwell dadas en (2.41). Finalmente, en la Sección 3 se presentan algunas conclusiones del presente trabajo.

2. APROXIMACIÓN NO RELATIVISTA PARA UN CAMPO GRAVITACIONAL DÉBIL

En la aproximación de campos débiles, la métrica del espacio-tiempo, g_{ik}, no difiere mucho del tensor métrico de la relatividad espacial, es decir, de la métrica para el espacio pseudo-euclídeo, denotada por η_{ik}. Por tal motivo, se puede escribir la métrica del espacio-tiempo, en esta aproximación, como la suma de la métrica pseudo-euclídea más una pequeña perturbación h_{ik} ($|h_{ik}| \ll |\eta_{ik}|$). Así, para todo $i,k \in \{0,1,2,3\} =: \mathfrak{L}$, se ve que

$$g_{ik} \approx \eta_{ik} + h_{ik}\,, \tag{2.1}$$

donde

$$\eta_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, & si\ i=0\ \ o\ k=0, \\ -\delta_{ik}, & si\ i,k \neq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Considerando los *símbolos de Christoffel* y tomando en cuenta la convención de Einstein de suma en los índices repetidos, para todo $i,k,l \in \mathfrak{L}$, se tiene que

$$\begin{cases} \Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right), \\ \Gamma^i_{\ kl} = g^{im}\Gamma_{mkl}\,, \end{cases} \tag{2.3}$$

con

$$g^{im}g_{mk} = \delta^i_k. \tag{2.4}$$

Además, para todo $i,j,k,l \in \mathfrak{L}$, las componentes del *tensor de Riemann* ([3]) están dadas por

$$R^l_{\ ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{\ ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^l_{\ ij} + \Gamma^l_{\ js}\Gamma^s_{\ ik} - \Gamma^l_{\ ks}\Gamma^s_{\ ij}\,.$$

Asimismo, para todo $i,j,k,l,m \in \mathfrak{L}$, bajando índices con $R_{lijk} = g_{ls}R^s_{\ ijk}$, se ve que

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{\ kl}\Gamma^p_{\ im} - \Gamma^n_{\ km}\Gamma^p_{\ il}\right). \tag{2.5}$$

Contrayendo dos de los subíndices del tensor dado en (2.5), se obtiene el *tensor de Ricci*, cuyas componentes son

$$R_{ik} = g^{lm}R_{limk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{\ ik}\Gamma^m_{\ lm} - \Gamma^m_{\ il}\Gamma^l_{\ km}\,, \tag{2.6}$$

para todo $i,k \in \mathfrak{L}$. De aquí en adelante, se sobrentiende que todos los subíndices y superíndices latinos pertenecen al conjunto $\mathfrak{L}$ y en cambio los subíndices y superíndices griegos pertenecen al conjunto $\{1,2,3\} =: \mathfrak{G}$. Ahora, se mencionan algunas propiedades conocidas de los tensores de Riemann y Ricci, que serán usadas posteriormente.

$$R_{ik} = R_{ki}\,, \tag{2.7}$$

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}\,, \tag{2.8}$$

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0, \tag{2.9}$$

$$R^n_{\ ikl;m} + R^n_{\ imk;l} + R^n_{\ ilm;k} = 0, \tag{2.10}$$

$$R^l_{\ m;l} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m}, \tag{2.11}$$

$$R = g^{ik}R_{ik}\,, \tag{2.12}$$

donde R es el *escalar de curvatura* y el símbolo ; en las ecuaciones (2.10) y (2.11) representa la derivada covariante.

Tomando un sistema local de coordenadas tal que la métrica del espacio-tiempo, g_{ik}, sea diagonal y ya que las perturbaciones, h_{ik}, a las componentes de la métrica pseudo-euclídea, η_{ik}, son pequeñas y considerando aproximaciones de primer orden en h_{ik}, se sigue que

$$R_{iklm} \approx \frac{\partial \Gamma_{ikm}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial x^m}\,.$$

Así,

$$R_{iklm} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right]. \qquad (2.13)$$

De este modo, las componentes del tensor de Ricci, en esta aproximación de primer orden, están dadas por

$$\begin{aligned} R_{ik} &= g^{lm} R_{limk} \\ &\approx \eta^{lm} R_{limk}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} R_{ik} &\approx \frac{1}{2}\left[-\eta^{lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-\partial^l \partial_l h_{ik} + \partial_k \partial_l h^l_i + \partial_i \partial_l h^l_k - \partial_i \partial_k h\right], \end{aligned} \qquad (2.14)$$

donde $h = h^i_i$.

Denotando por ϕ el *potencial gravitatorio,* se tiene que la ecuación de Laplace para el espacio libre es

$$\phi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial \phi}{\partial x^k}\right] = 0, \qquad (2.15)$$

donde g es el determinante del tensor métrico del espacio-tiempo. En el caso de campos gravitacionales débiles y usando (2.15), se obtiene la siguiente condición de medida para la métrica del espacio-tiempo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\sqrt{-g}\, g^{ik}\right] = 0. \qquad (2.16)$$

Por otro lado, el determinante del tensor métrico, en esta aproximación, viene dado por

$$\begin{aligned} g &\approx \eta(1 + \eta^{ik} h_{ik}) \\ &\approx \eta(1 + h) \\ &= -(1 + h), \end{aligned} \qquad (2.17)$$

donde η es el determinante del tensor métrico del espacio pseudo-euclídeo. Luego,

$$\sqrt{-g} \approx \sqrt{1 + h} \approx 1 + \frac{h}{2}. \qquad (2.18)$$

Así,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^k}\left[g^{ik}\left(1 + \frac{h}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\left(\eta^{ik} - \tilde{h}^{ik}\right)\left(1 + \frac{\tilde{h}}{2}\right)\right] = 0, \end{aligned}$$

donde $\tilde{h}^{ik} = -h^{ik}$ y $\tilde{h} = \tilde{h}^i{}_i$. Por simplicidad de notación, de aquí en adelante, se escribe h para representar $\tilde{h}$. De la ultima ecuación y en vista que se está considerando aproximaciones de primer orden en h^{ik}, se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(h^{ik} - \frac{1}{2}\eta^{ik} h\right) \approx 0.$$

Se define ahora

$$\bar{h}^{ik} := h^{ik} - \frac{1}{2}\eta^{ik} h.$$

Usando las dos últimas expresiones, se sigue que

$$\partial_k \bar{h}^{ik} = \frac{\partial \bar{h}^{ik}}{\partial x^k} \approx 0. \qquad (2.19)$$

Ahora, se introducen los siguientes símbolos:

$$\begin{aligned} G^{ijk} &:= \frac{1}{2}\left(\bar{h}^{ij,k} - \bar{h}^{ki,j}\right) \\ &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{h}^{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{h}^{ki}}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial^k \bar{h}^{ij} - \partial^j \bar{h}^{ki}\right). \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Derivando la última expresión con respecto a la *k*-ésima variable y puesto que $\bar{h}$ es dos veces diferenciable, se ve que

$$\begin{aligned} G^{ijk}{}_{,k} &= \frac{1}{2}\left(\partial^k \partial_k \bar{h}^{ij} - \partial_k \partial^j \bar{h}^{ki}\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\partial^k \partial_k \bar{h}^{ij}, \end{aligned} \qquad (2.21)$$

donde en la última expresión se ha usado (2.19) y el hecho que se está considerando campos gravitacionales débiles. Ya que h es dos veces diferenciable, se puede escribir

$$\partial_i \partial_k h = \frac{1}{2}\partial_i \partial_k h + \frac{1}{2}\partial_k \partial_i h.$$

Usando la última ecuación y (2.14), se obtiene

$$R_{ik} \approx \frac{1}{2}\left[-\partial^l \partial_l h_{ik} + \partial_k\left(\partial_l h^l{}_i - \frac{1}{2}\partial_i h\right) + \partial_i\left(\partial_l h^l{}_k - \frac{1}{2}\partial_k h\right)\right].$$

Los dos términos entre paréntesis en el miembro del lado derecho de la última expresión, en esta aproximación de primer orden, son cero pues

$$\begin{aligned}\partial_l h^l{}_j - \frac{1}{2}\partial_j h &= \partial_l\left(g_{mj}h^{lm}\right) - \frac{1}{2}g_{mj}\partial^m h \\ &\approx \eta_{mj}\left[\partial_l h^{lm} - \frac{1}{2}\partial^m h\right] \\ &\approx 0,\end{aligned}$$

donde en la última expresión se ha usado (2.19).

Procediendo de forma similar, se tiene que las componentes contravariantes del tensor de Ricci, en esta aproximación de primer orden, están dadas por

$$\begin{aligned}R^{ik} &\approx -\frac{1}{2}\partial^l \partial_l h^{ik} \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial_t^2} - \Delta\right]h^{ik} \\ &= \frac{1}{2}\Box h^{ik},\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde

$$\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial_t^2}$$

es el *operador de d'Alembert.*

Además, el escalar de curvatura $R = g_{ik}R^{ik}$, en esta aproximación de primer orden y usando (2.22), está dado por

$$\begin{aligned}R &\approx \eta_{ik}\Box\frac{h^{ik}}{2} \\ &\approx \frac{1}{2}\Box h.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Por otro lado, la ecuación de campo de Einstein, sin tomar en cuenta el término de la constante cosmológica, es

$$R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{ik}, \tag{2.24}$$

donde T^{ik} son las componentes contravariantes del *tensor energía-momento.* Reemplazando ahora (2.22) y (2.23) en (2.24) y tomando en cuenta el hecho que $g^{ik} \approx \eta^{ik}$, se obtiene que

$$\frac{1}{2}\Box\bar{h}^{ik} \approx \frac{8\pi G}{c^4}T^{ik}.$$

Usando (2.21) en la última expresión, se sigue que

$$-G^{ikj}{}_{,j} \approx \frac{8\pi G}{c^4}T^{ik}. \tag{2.25}$$

(i) A continuación, se definen las siguientes cantidades:

$$G^{00i} := \frac{2}{c^2}E_g^i \tag{2.26}$$

y

$$A^i := \frac{c^2}{4}\bar{h}^{0i}, \tag{2.27}$$

donde E_g^i son las componentes del *campo gravitoeléctrico* y A^i son las componentes de los *potenciales gravitoelectromagnéticos.* De (2.25), se ve que

$$G^{00i}{}_{,i} \approx -\frac{8\pi G}{c^4}T^{00}. \tag{2.28}$$

Además, se conoce que las componentes contravariantes del tensor energía-momento vienen dadas por ([3])

$$T^{ik} = g^{ik}\mathcal{P}c - (\mathcal{P}c + \mathcal{E})u^i u^k, \tag{2.29}$$

donde $\mathcal{P}$ es la *densidad de momento,* $\mathcal{E}$ es la *densidad de energía* y u^j son las componentes contravariantes del *cuadrivector velocidad.* Tomando $i = k = 0$ en (2.29), se consigue

$$T^{00} = g^{00}\mathcal{P}c - (\mathcal{P}c + \mathcal{E})u^0 u^0. \tag{2.30}$$

Por otro lado, el intervalo de tiempo propio está dado por

$$ds^2 = g_{00}dx^0 dx^0 \approx dx^0 dx^0,$$

donde en la última relación se ha usado la aproximación de orden cero para la métrica del espacio-tiempo. De la última expresión, se observa que

$$u^0 u^0 = \frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds} \approx 1. \tag{2.31}$$

Reemplazando (2.31) en (2.30), se obtiene que

$$\begin{aligned}T^{00} &\approx \mathcal{P}c - (\mathcal{P}c + \mathcal{E}) \\ &= -\mathcal{E} = -\rho c,\end{aligned} \tag{2.32}$$

donde ρ es la densidad de masa. Reemplazando ahora (2.26) y (2.32) en (2.28), se tiene que

$$\frac{2}{c^2}\frac{\partial E_g^i}{\partial x^i} \approx \frac{8\pi G}{c^3}\rho.$$

De la última expresión, se consigue

$$\frac{\partial E_g^0}{\partial x^0} - \nabla \cdot \overrightarrow{E_g} \approx \frac{4\pi G}{c}\rho.$$

Luego,

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E_g} \approx -4\pi G \rho_g, \tag{2.33}$$

donde

$$\rho_g := \frac{\rho}{c} - \frac{1}{4\pi c G}\frac{\partial E_g^0}{\partial t} \tag{2.34}$$

se denomina, de aquí en adelante, *densidad de masa-espacio-tiempo*.

(ii) Usando ahora (2.26), se obtiene

$$G^{00i}{}_{,k} - G^{00k}{}_{,i} = \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial E_g^i}{\partial x^k} - \frac{\partial E_g^k}{\partial x^i}\right).$$

Considerando solamente las componentes espaciales en la última expresión, usando (2.20) y el hecho que las componentes contravariantes $\bar{h}^{ij}$ son dos veces diferenciables, se tiene que

$$\frac{2}{c^2}\left[\frac{\partial E_g^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_g^\beta}{\partial x^\alpha}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \bar{h}^{0\alpha}}{\partial x^\beta \partial x^0} - \frac{\partial^2 \bar{h}^{0\beta}}{\partial x^0 \partial x^\alpha}\right].$$

Usando ahora (2.27) y la suposición que las componentes contravariantes $\bar{h}^{ij}$ son dos veces diferenciables, se consigue

$$\frac{\partial E_g^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_g^\beta}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^0}\left[\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}\right].$$

De la última expresión, se concluye que

$$\nabla \times \overrightarrow{E_g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B_g}}{\partial t}, \tag{2.35}$$

donde

$$\overrightarrow{B_g} := \nabla \times \overrightarrow{A} \tag{2.36}$$

es el campo gravitomagnético.

(iii) De (2.36) y suponiendo que el campo vectorial $\overrightarrow{A}$ es dos veces diferenciable, se deduce que

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B_g} = 0. \tag{2.37}$$

(iv) Tomando $i = 0$ y $k = \alpha$ en (2.25), se obtiene

$$G^{0\alpha j}{}_{,j} \approx -\frac{8\pi G}{c^4}T^{0\alpha}. \tag{2.38}$$

Sin pérdida de generalidad se considera $\alpha = 2$ en la última expresión, para los otros casos $\alpha \in \{1, 3\}$ se procede de forma similar. Desarrollando la suma en j en (2.38), se consigue

$$G^{020}{}_{,0} - G^{021}{}_{,1} - G^{022}{}_{,2} - G^{023}{}_{,3}$$

$$\approx -\frac{8\pi G}{c^4}T^{02}. \tag{2.39}$$

De (2.20), (2.26) y (2.27), se tiene que

$$\begin{aligned} G^{020} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{h}^{02}}{\partial x_0} - \frac{\partial \bar{h}^{00}}{\partial x_2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{h}^{00}}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{h}^{02}}{\partial x_0}\right) \\ &= -G^{002} = -\frac{2}{c^2}E_g^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{021} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{h}^{02}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{h}^{01}}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{2}{c^2}B_g^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{022} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{h}^{02}}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{h}^{02}}{\partial x_2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G^{023} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{h}^{02}}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{h}^{03}}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial A^2}{\partial x_3} - \frac{\partial A^3}{\partial x_2}\right) \\ &= -\frac{2}{c^2}B_g^1. \end{aligned}$$

Reemplazando ahora las últimas cuatro expresiones en (2.39), se deduce que

$$-\frac{2}{c^3}\frac{\partial E_g^2}{\partial t} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial B_g^3}{\partial x} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial B_g^1}{\partial z}$$

$$\approx -\frac{8\pi G}{c^4}T^{02}.$$

Luego,

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial E_g^2}{\partial t}-\frac{\partial B_g^3}{\partial x}+\frac{\partial B_g^1}{\partial z}\approx-\frac{4\pi G}{c^2}T^{02}.$$

Así,

$$\left(\nabla\times\overrightarrow{B_g}\right)^2\approx-\frac{4\pi G}{c^2}T^{02}+\frac{1}{c}\frac{\partial E_g^2}{\partial t}.$$

A continuación, se define la *densidad de corriente de masa-espacio-tiempo,* dada por

$$\overrightarrow{J_g}:=(T^{01},T^{02},T^{03}).$$

Entonces,

$$\left(\nabla\times\overrightarrow{B_g}\right)^2\approx-\frac{4\pi G}{c^2}J_g^2+\frac{1}{c}\frac{\partial E_g^2}{\partial t}.$$

Como se mencionó al inicio de este ítem y procediendo de forma similar a lo realizado para el caso $\alpha=2$ arriba, se obtienen expresiones análogas a la última relación, pero reemplazando el superíndice 2 por 1 y 3, respectivamente. Por lo tanto,

$$\nabla\times\overrightarrow{B_g}\approx-\frac{4\pi G}{c^2}\overrightarrow{J_g}+\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{E_g}}{\partial t}. \qquad (2.40)$$

Tomando en consideración (2.33), (2.35), (2.37) y (2.40), se obtiene el siguiente sistema de relaciones gravitoelectromagnéticas de tipo Maxwell en la aproximación de campos débiles no relativista

$$\begin{cases}\nabla\times\overrightarrow{E_g}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{B_g}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\overrightarrow{E_g}\approx-4\pi G\rho_g\,,\\ \nabla\times\overrightarrow{B_g}\approx-\frac{4\pi G}{c^2}\overrightarrow{J_g}+\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{E_g}}{\partial t}\,,\\ \nabla\cdot\overrightarrow{B_g}=0.\end{cases} \qquad (2.41)$$

Finalmente, se observa que los sistemas (1.9) y (2.41) están relacionados a través de la aproximación $\vec{g}\approx c\overrightarrow{E_g}$.

3. CONCLUSIONES

(1) El sistema lineal de relaciones para los campos gravitoelectromagnéticos (2.41), en el espacio vacío y considerando campos gravitacionales débiles, está dado por

$$\begin{cases}\nabla\times\overrightarrow{E_g}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{B_g}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\overrightarrow{E_g}\approx0,\\ \nabla\times\overrightarrow{B_g}\approx\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{E_g}}{\partial t},\\ \nabla\cdot\overrightarrow{B_g}=0.\end{cases} \qquad (3.1)$$

De (3.1), se obtienen las siguientes dos ecuaciones hiperbólicas

$$\Delta\overrightarrow{E_g}\approx\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E_g}}{\partial t^2}$$

y

$$\Delta\overrightarrow{B_g}\approx\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{B_g}}{\partial t^2},$$

las cuales han sido validadas experimentalmente por medio de la detección de ondas gravitacionales ([4]).

(2) El sistema (2.41) es semejante al sistema de ecuaciones de la teoría electromagnética de Maxwell. Así, se muestra una analogía entre la teoría de los campos electromagnéticos y la de los campos gravitoelectromagnéticos en la aproximación lineal de la relatividad general.

(3) Usando la aproximación de campos gravitacionales débiles se ha obtenido el sistema lineal (2.41) a pesar que las ecuaciones de campo de Einstein son altamente no lineales.

(4) El término

$$-\frac{1}{4\pi cG}\frac{\partial E_g^0}{\partial t}$$

en la expresión (2.34) de la densidad de masa-espacio-tiempo no es considerado en la teoría clásica de Newton, sin embargo, contribuye al valor de la densidad de masa efectiva y está asociado a la curvatura del espacio-tiempo en la aproximación de campos gravitacionales débiles.

(5) Por medio de métodos de cuantización para campos clásicos, usuales en la electrodinámica cuántica, se podría pensar en la posibilidad de generar un modelo de cuantización del campo gravitacional. Esto será llevado a cabo en un trabajo futuro.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS Y ELECTRÓNICAS

[1]. I. Ciufolini, *Dragging of inertial frames*, Nature **449** (2007), 41-47.

[2]. I. Ciufolini et al., *Test of General Relativity and measurement of the Lense-Thirring effect with two Earth satellites*, Science **279** (1998), 2100-2103.

[3]. L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Teoría Clásica de los Campos*, Volumen 2, Curso de Física Teórica, Segunda Edición, Editorial Reverté, S.A., 1992.

[4]. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).