Matemática: Una publicación de FCNM – ESPOL
2015, Vol. 14, No.1

ONDAS DISPERSIVAS – KORTEWEG – DE – VRIES (KDV)

[1]Cascante Roberto, [2]Martín B. Carlos M.

Resumen: *La presente investigación muestra el detalle de los cálculos obtenidos para una parte de la deducción de una de las ecuaciones más importantes de la actualidad en las Matemáticas, la ecuación de los científicos holandeses Diederick Johannes Korteweg y Gustav De Vries (KdV), llamada así en honor a estos destacados matemáticos. Esta deducción fué publicada en el año 1895 por la revista "Philosophical Magazine and Journal of Science" en Londres; la misma que con este trabajo venían a formalizar un hecho que se había puesto de manifiesto algunos años antes con un modelo matemático de ondas de agua sobre superficies poco profundas, conocidas como Solitones. Los Solitones tienen como principales características de que son ondas de gran amplitud cuya velocidad de propagación depende de su amplitud en contraposición a las ondas lineales, son dispersivas pero a su vez preservan su forma, son ondas de tipo onda solitaria, interactúan entre sí o con obstáculos finitos de tal manera que luego de la interacción recuperan totalmente sus propiedades previas a la interacción salvo cambios de fase.*
En la parte inicial de la investigación realizada, se presenta una introducción histórica sobre el origen de este fenómeno físico ocurrido en un canal de Escocia por Scott Russell; luego se deduce la variación del nivel del agua con respecto al tiempo, lo cual origina una ecuación diferencial parcial que permitirá encontrar la solución de la misma, para demostrar esta fórmula se empieza con la suposición de que las velocidades horizontal y vertical u *y* v *del fluido pueden ser expresadas por series rápidamente convergentes. Finalmente, se determina la solución de la ecuación en la recta para ondas estacionarias, para esto se realiza el análisis de diferentes escenarios que podrían considerarse en la ecuación KdV, además para esta ecuación se emplean funciones elípticas que pueden ser vistas como una generalización de las funciones trigonométricas conocidas.*
PALABRAS CLAVES: Ondas Dispersivas, Solitón, Series Rápidamente Convergentes, Funciones elípticas

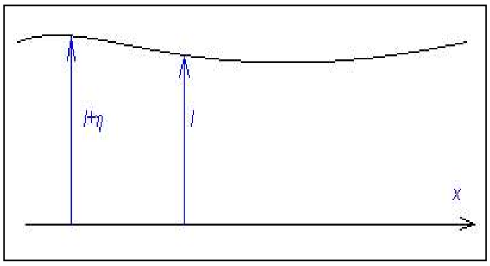
Abstract: *The present investigation it shows the detail of the calculations obtained for a part of the deduction of one of the most important equations of the current importance in the Mathematics, the equation of the Dutch scientists Diederick Johannes Korteweg and Gustav De Vries (KdV), call like that in honor to these out-standing mathematicians. This deduction was published in the year 1895 by the magazine " Philosophical Magazine and Journal of Science " in London; the same one that with this work they were coming to formalize a fact that had been revealed some years before by a mathematical model of water waves on slightly deep surfaces known as Solitons. The Solitons have as principal characteristics of which they are waves of great extent which speed of spread depends on his extent in contraposition to the linear waves, are dispersives but in turn they preserve his form, are waves of type solitary wave, interact between them or with finite obstacles in such a way that after the interaction they recover totally his properties before the interaction except phase changes. In the initial part of the realized investigation, one presents a historical introduction on the origin of this physical phenomenon happened in a channel of Scotland for Scott Russell; then there deduces the variation of the level of the water with regard to the time, which originates a differential partial equation that will allow to find the solution of the same one, to demonstrate this formula it is begun by the supposition of which the speeds horizontal and vertical and of the fluid they can be expressed by rapidly convergent series. Finally, the solution of the equation decides in the straight line for stationary waves, for this there is realized the analysis of different scenes that might be considered in the equation KdV, in addition for this equation there are used elliptical functions that can be seen as a generalization of the trigonometrical known functions.*
KEY WORDS: Dispersive Waves, Soliton, Rapidly convergent Series, elliptical Functions
Recibido: Noviembre 2015.
Aceptado: Mayo 2016.

1. INTRODUCCIÓN

La formalización de la ecuación KdV se debe precisamente a los científicos holandeses Diederick Johannes Korteweg y Gustav De Vries quienes en 1895 derivaron la ecuación que describía la propagación de ondas en la superficie de un canal de aguas poco profundas (Korteweg y De Vries, 1895). Con este trabajo venían a formalizar un hecho que se había puesto de manifiesto algunos años antes en un canal de Escocia por John Scott Russell (Russell, 1844); este último solo había logrado inferir la expresión de forma de la onda (solitón) sin llegar a la ecuación matemática que modelaba el fenómeno.

Los solitones tienen como principales características que los definen: son ondas de gran amplitud cuya velocidad de propagación depende de su amplitud en contraposición a las ondas lineales, son dispersivas pero a su vez preservan su forma, son ondas de tipo onda solitaria, interactúan entre sí o con obstáculos finitos de tal manera que luego de la interacción recuperan totalmente sus propiedades previas a la interacción salvo cambios de fase.
La presencia de soluciones tipo solitón en la ecuación de KdV se puede interpretar como el balance entre la contribución del término no lineal de la misma y el correspondiente al efecto dispersivo, de tal manera que entre ellos se establece un balance que da a lugar a estructuras de marcada persistencia que son precisamente dicho tipo de soluciones.

[1]*Cascante Roberto., Profesor, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, ESPOL. (e_mail: rcascant@espol.edu.ec).*
[2]*Martín Barreiro Carlos, Profesor, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, ESPOL. (e_mail: cmmartin@espol.edu.ec).*



Korteweg y de Vries han investigado la deformación de un sistema de ondas de forma arbitraria pero que se mueven en una sola dirección. Si $l+\eta$ (η muy pequeño) representa la elevación de la superficie por encima del fondo a una distancia x desde el origen de coordenadas, entonces se deduce la ecuación:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\,\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)}{\partial x}$$

Donde:

α :Constante Arbitraria

$\sigma=\frac{1}{3}l^3-\frac{Tl}{\rho g}$, donde:

l : Profundidad del líquido

T :Tensión superficial del líquido

ρ : Densidad del líquido

g : Gravedad

Suponiendo que $\frac{\partial\eta}{\partial t}=0$ (condición para ondas estacionarias) se tiene que:

$$\eta=h\sec h^2 x\sqrt{\frac{h}{4\sigma}}$$

Esto último representa la ecuación de la onda solitaria, que es un caso particular de solución.

Luego, otro tipo de solución se puede detectar para ondas estacionarias, ahora la forma de la onda de la superficie está determinada por la ecuación:

$$\eta=hcn^2 x\sqrt{\frac{h+k}{4\sigma}}\left(\operatorname{mod}.M=\sqrt{\frac{h}{h+k}}\right)$$

A continuación se muestran los cálculos realizados para obtener los diferentes resultados.

2. LA FÓRMULA PARA $\frac{d\eta}{dt}$.

Para demostrar esta fórmula se empieza con la suposición de que las velocidades horizontal y vertical u y v del fluido pueden ser expresadas por series rápidamente convergentes de la forma:

$$u=f+yf_1+y^2f_2+\ldots(1)$$
$$v=y\phi_1+y^2\phi_2+\ldots(2)$$

Donde y representa la altura de la partícula sobre el fondo del canal, y $f, f_1, f_2,\ldots\phi_1,\phi_2,\ldots$ son funciones de x y t. Esto implica que $v|_{y=0}=0$; es decir, la velocidad normal en el fondo es cero.

Desde una de estas condiciones, la incompresibilidad del líquido, la cual puede ser expresada por $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ (3), se puede deducir que $\phi_n=-\frac{1}{n}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}$ de la siguiente manera:

A partir de las expresiones:

$$u=f+yf_1+y^2f_2+\ldots$$
$$v=y\phi_1+y^2\phi_2+\ldots$$

Derivando u con respecto a x y v con respecto a y, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial x}+y^2\frac{\partial f_2}{\partial x}+\ldots$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\phi_1+2y\phi_2+3y^2\phi_3+\ldots$$

Esto último lo remplazamos en (3) y tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial x}+y^2\frac{\partial f_2}{\partial x}+\ldots+\phi_1+2y\phi_2+3y^2\phi_3+\ldots=0$$

Agrupando términos semejantes y factorizando:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\phi_1\right)+y\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+2\phi_2\right)+y^2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+3\phi_3\right)+\ldots=0$$

De ahí que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\phi_1=0\rightarrow\phi_1=-\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+2\phi_2=0\rightarrow\phi_2=-\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}+3\phi_3=0\rightarrow\phi_3=-\frac{1}{3}\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

.

.

.

Generalizando :

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}+n\phi_n=0\rightarrow\phi_n=-\frac{1}{n}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}$$

De la misma manera, debido a la ausencia de rotación del fluido (irrotacional), lo cual es expresado por $\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0$ (4), se puede deducir que $f_1=0$; $f_n=\frac{1}{n}\frac{\partial\phi_{n-1}}{\partial x}=-\frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 f_{n-2}}{\partial x^2}$ de la siguiente manera:

A partir de las expresiones:

$$u=f+yf_1+y^2f_2+...$$

$$v=y\phi_1+y^2\phi_2+...$$

Derivando u con respecto a y y v con respecto a x, tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1+2yf_2+3y^2f_3+...$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=y\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+y^2\frac{\partial\phi_2}{\partial x}+y^3\frac{\partial\phi_3}{\partial x}+...$$

Esto último lo remplazamos en (4) y tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=f_1+2yf_2+3y^2f_3+...$$

$$...-y\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-y^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-y^3\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}-...=0$$

Agrupando términos semejantes y factorizando:

$$f_1+y\left(2f_2-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)+y^2\left(3f_3-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right)+y^3\left(4f_4-\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\right)+...=0$$

De ahí que:

$$f_1=0$$

$$2f_2-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}=0\rightarrow f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}$$

$$3f_3-\frac{\partial\phi_2}{\partial x}=0\rightarrow f_3=\frac{1}{3}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}$$

$$4f_4-\frac{\partial\phi_3}{\partial x}=0\rightarrow f_4=\frac{1}{4}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}$$

.

.

.

Generalizando:

$$nf_n-\frac{\partial\phi_{n-1}}{\partial x}=0\rightarrow f_n=\frac{1}{n}\frac{\partial\phi_{n-1}}{\partial x}$$

Además, ya que $\phi_n=-\frac{1}{n}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}$, entonces $\frac{\partial\phi_{n-1}}{\partial x}=-\frac{1}{n-1}\frac{\partial^2 f_{n-2}}{\partial x^2}$. Y por lo tanto:

$$f_n=\frac{1}{n}\frac{\partial\phi_{n-1}}{\partial x}=-\frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 f_{n-2}}{\partial x^2}$$

A partir de la relación $f_n=-\frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 f_{n-2}}{\partial x^2}$, tenemos que:

$$f_1=0$$

$$f_2=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_3=-\frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}=0$$

$$f_4=-\frac{1}{3\cdot 4}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

$$f_5=-\frac{1}{4\cdot 5}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}=0$$

$$f_6=-\frac{1}{5\cdot 6}\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}=-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}$$

.

.

.

Generalizando

$$f_n=\begin{cases}0 & ;n\_es\_impar\\ (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} & ;n\_es\_par\end{cases}$$

Asimismo, a partir de la relación $\phi_n=-\frac{1}{n}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}$, tenemos que:

$$\phi_1 = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$$

$$\phi_3 = -\frac{1}{3}\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

$$\phi_4 = -\frac{1}{4}\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$$

$$\phi_5 = -\frac{1}{5}\frac{\partial f_4}{\partial x} = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}$$

$$\phi_6 = -\frac{1}{6}\frac{\partial f_5}{\partial x} = 0$$

.

.

.

Generalizando

$$\phi_n = \begin{cases} 0 & ;n\_es\_par \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n} & ;n\_es\_impar \end{cases}$$

Reemplazando estos resultados en las expresiones iniciales de u y de v, tenemos:

$$u = f - \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{24}y^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{720}y^6\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}} \quad (5)$$

$$v = -y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6}y^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{120}y^5\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}y^{2n+1}\frac{\partial^{2n+1} f}{\partial x^{2n+1}} \quad (6)$$

Y además, si ϕ representa la **velocidad potencial** y ψ la **función de la corriente**, se tiene:

$$\varphi = \int u dx \rightarrow \varphi =$$

$$\int f\partial x - \frac{1}{2}y^2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{24}y^4\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{720}y^6\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \ldots (7)$$

$$\psi = -\int v dx \rightarrow \psi =$$

$$yf - \frac{1}{6}y^3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{120}y^5\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \ldots (8)$$

Tales ecuaciones satisfacen todas las condiciones del problema para el interior del fluido y al mismo tiempo es fácil ver que para ondas largas estas series son rápidamente convergentes. En realidad, para tales ondas el estado de movimiento cambia lentamente con x, y por lo tanto los sucesivos cocientes diferenciales con respecto a esta variable y todas las funciones referentes, tanto como f lo hace, el estado de movimiento debe decrecer rápidamente.

Pasando a las condiciones de frontera, sean p_1 una constante que representa la presión atmosférica, $p_1^{'}$ la presión en un punto debajo de la superficie donde la fuerza de la capilaridad deja de actuar, y T la tensión superficial. De ahora en adelante se usará el subíndice $(_1)$ para hacer referencia a cantidades en la superficie. Por diferencia de presiones tenemos:

$$p_1^{'} = p_1 - T\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

Además, por la conocida ecuación de la Hidrodinámica:

$$\frac{p_1^{'}}{\rho} = \chi(t) - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(u_1^2 + v_1^2\right) - gy_1$$

Tenemos:

$$\frac{p_1}{\rho} = \chi(t) - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(u_1^2 + v_1^2\right) - gy_1 + \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \quad (9)$$

Ahora, reemplazando las expresiones (5), (6) y (7) en (9), tenemos:

$$\frac{p_1}{\rho} = \chi(t) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\int f\partial x - \frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \ldots\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(f - \frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \ldots\right)^2 + \left(-y_1\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6}y_1^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{120}y_1^5\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \ldots\right)^2\right)$$
$$-gy_1 + \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

De esta forma, suponiendo cierta regularidad, tenemos que:

$$\frac{p_1}{\rho} = \chi(t) - \int\frac{\partial f}{\partial t}\partial x + \frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} - \frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3} + \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial t\partial x^5} - \ldots$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(f - \frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \ldots\right)^2 + \left(-y_1\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6}y_1^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{120}y_1^5\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \ldots\right)^2\right)$$
$$-gy_1 + \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

Desarrollando los cuadrados en la expresión, tenemos:

$$\frac{p_1}{\rho} = \chi(t) - \int\frac{\partial f}{\partial t}\partial x + \frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} - \frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3} + \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial t\partial x^5} - \ldots$$
$$-\frac{1}{2}\left[\left(f^2 - 2f\left(\frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} - \ldots\right)^2\right)\right.$$
$$\left. + \left(y_1^2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2y_1\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{6}y_1^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{120}y_1^5\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{6}y_1^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{120}y_1^5\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \ldots\right)^2\right)\right]$$
$$-gy_1 + \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{p_1}{\rho} = \chi(t) - \int\frac{\partial f}{\partial t}\partial x + \frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x} - \frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3} + \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial t\partial x^5} - \ldots$$
$$-\frac{1}{2}\left[f^2 - fy_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{12}fy_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{360}fy_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \ldots + \frac{1}{4}y_1^4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right.$$
$$\left(\frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{24}y_1^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{720}y_1^6\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \ldots\right)^2$$

$$+y_1^{\,2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{3}y_1^{\,4}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{60}y_1^{\,6}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-...+\frac{1}{36}y_1^{\,6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2-2\left(\frac{1}{6}y_1^{\,3}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)\left(\frac{1}{120}y_1^{\,5}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-...\right)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{120}y_1^{\,5}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-...\right)^2\right]-gy_1+\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{p_1}{\rho}=\chi(t)-gy_1-\int\frac{\partial f}{\partial t}\partial x+\frac{1}{2}y_1^{\,2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}-\frac{1}{24}y_1^{\,4}\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3}+\frac{1}{720}y_1^{\,6}\frac{\partial^6 f}{\partial t\partial x^5}-...$$
$$-\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}fy_1^{\,2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{24}fy_1^{\,4}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{1}{720}fy_1^{\,6}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}-...-\frac{1}{8}y_1^{\,4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2+\frac{1}{48}y_1^{\,6}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$
$$-\frac{1}{1440}y_1^{\,8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+...-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}y_1^{\,4}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{720}y_1^{\,6}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+...\right)^2-\frac{1}{2}y_1^{\,2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{6}y_1^{\,4}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$
$$-\frac{1}{120}y_1^{\,6}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}+...-\frac{1}{72}y_1^{\,6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2+\frac{1}{720}y_1^{\,8}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-...-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{120}y_1^{\,5}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-...\right)^2+\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

Ordenando la expresión tenemos:

$$\frac{p_1}{\rho}=\chi(t)-\int\frac{\partial f}{\partial t}\partial x-\frac{1}{2}f^2-gy_1+\frac{1}{2}fy_1^{\,2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}y_1^{\,2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}-\frac{1}{2}y_1^{\,2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{24}fy_1^{\,4}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{8}y_1^{\,4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{6}y_1^{\,4}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-\frac{1}{24}y_1^{\,4}\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3}+\frac{1}{720}fy_1^{\,6}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+\frac{1}{48}y_1^{\,6}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{72}y_1^{\,6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2+\frac{1}{720}y_1^{\,6}\frac{\partial^6 f}{\partial t\partial x^5}$$
$$-\frac{1}{120}y_1^{\,6}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-\frac{1}{1440}y_1^{\,8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+...-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}y_1^{\,4}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{720}y_1^{\,6}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+...\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{120}y_1^{\,5}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-...\right)^2$$
$$+\frac{1}{720}y_1^{\,8}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-...+\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{p_1}{\rho}=\chi(t)-\int\frac{\partial f}{\partial t}\partial x-\frac{1}{2}f^2-gy_1+\left(\frac{1}{2}f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)y_1^2+\left(-\frac{1}{24}f\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-\frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3}\right)y_1^4+\left(\frac{1}{720}f\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+\frac{1}{48}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{72}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2+\frac{1}{720}\frac{\partial^6 f}{\partial t\partial x^5}-\frac{1}{120}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)y_1^6$$
$$+...+\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

Esta última expresión tiene la forma:

$$\frac{p_1}{\rho}=L-gy_1+My_1^2+Ny_1^4+Py_1^6+...+\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\,(10)$$

Donde:

$$L=\chi(t)-\int\frac{\partial f}{\partial t}\partial x-\frac{1}{2}f^2$$

$$M = \frac{1}{2} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

$$N = -\frac{1}{24} f \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial x^3}$$

$$P = \frac{1}{720} f \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \frac{1}{48} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{72}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{1}{720} \frac{\partial^6 f}{\partial t \partial x^5} - \frac{1}{120} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}$$

Por diferenciación con respecto a x de la ecuación (10) se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + y_1^2 \frac{\partial M}{\partial x} + y_1^4 \frac{\partial N}{\partial x} + y_1^6 \frac{\partial P}{\partial x} + \ldots - g \frac{\partial y_1}{\partial x} + 2My_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + 4Ny_1^3 \frac{\partial y_1}{\partial x} + 6Py_1^5 \frac{\partial y_1}{\partial x} + \ldots + \frac{T}{\rho} \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} = 0 \ldots\ldots(11)$$

Además, una segunda ecuación de la Hidrodinámica es la de continuidad y se aplicaría bien a la superficie:

$$-u_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + v_1 - \frac{\partial y_1}{\partial t} = 0 \ldots\ldots(12)$$

Para satisfacer las ecuaciones (11) y (12) por el método de aproximaciones sucesivas, se establece que $y_1 = l + \eta$, $f = q_0 + \beta$, donde l y q_0 se suponen constantes y η y β son funciones muy pequeñas que dependen de x y t. Tratando entonces con el hecho de que para ondas largas, cuya longitud de onda es grande en comparación con la profundidad del canal, todas las nuevas diferenciaciones con respecto a x dan lugar a cantidades continuamente más pequeñas. Estas aproximaciones son de primer orden.

De la ecuación (11) tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(t) - \int \frac{\partial f}{\partial t} \partial x - \frac{1}{2} f^2\right) + y_1^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) \\
&+ y_1^4 \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{24} f \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial x^3}\right) \\
&+ y_1^6 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{720} f \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \frac{1}{48} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{72}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{1}{720} \frac{\partial^6 f}{\partial t \partial x^5} - \frac{1}{120} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right) + \ldots - g \frac{\partial y_1}{\partial x} \\
&+ 2\left(\frac{1}{2} f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) y_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + 4\left(-\frac{1}{24} f \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial x^3}\right) y_1^3 \frac{\partial y_1}{\partial x} \\
&+ 6\left(\frac{1}{720} f \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \frac{1}{48} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \frac{1}{72}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{1}{720} \frac{\partial^6 f}{\partial t \partial x^5} - \frac{1}{120} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right) y_1^5 \frac{\partial y_1}{\partial x} + \ldots + \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0
\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial f}{\partial t}-f\frac{\partial f}{\partial x}+y_1^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}f\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial t\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$$

$$+y_1^4\left(-\frac{1}{24}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{24}f\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{24}\frac{\partial^5 f}{\partial t\partial x^4}\right)$$

$$+y_1^6\left(\frac{1}{720}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+\frac{1}{720}f\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}+\frac{1}{48}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{1}{48}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}-\frac{1}{36}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{1}{720}\frac{\partial^7 f}{\partial t\partial x^6}-\frac{1}{120}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{120}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\right)+\ldots-g\frac{\partial y_1}{\partial x}+2\left(\frac{1}{2}f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right)y_1\frac{\partial y_1}{\partial x}+4\left(-\frac{1}{24}f\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-\frac{1}{24}\frac{\partial^4 f}{\partial t\partial x^3}\right)y_1^3\frac{\partial y_1}{\partial x}+6\left(\frac{1}{720}f\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+\frac{1}{48}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{72}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)^2+\frac{1}{720}\frac{\partial^6 f}{\partial t\partial x^5}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{120}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)y_1^5\frac{\partial y_1}{\partial x}+\ldots+\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}=0$$

De esto último tenemos que:

$$-\frac{\partial f}{\partial t}-f\frac{\partial f}{\partial x}-g\frac{\partial y_1}{\partial x}=0\rightarrow-\frac{\partial}{\partial t}(q_0+\beta)-(q_0+\beta)\frac{\partial}{\partial x}(q_0+\beta)-g\frac{\partial}{\partial x}(l+\eta)=0$$

$$-\frac{\partial \beta}{\partial t}-(q_0+\beta)\frac{\partial \beta}{\partial x}-g\frac{\partial \eta}{\partial x}=0\rightarrow-\frac{\partial \beta}{\partial t}-q_0\frac{\partial \beta}{\partial x}-g\frac{\partial \eta}{\partial x}=0$$

$$\therefore q_0\frac{\partial \beta}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial t}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}=0$$

Por otro lado reemplazando (5) y (6) en (12), tenemos:

$$-\left(f-\frac{1}{2}y_1^{\,2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{24}y_1^{\,4}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}-\frac{1}{720}y_1^{\,6}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+\ldots\right)\frac{\partial y_1}{\partial x}+\left(-y_1\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{6}y_1^{\,3}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}-\frac{1}{120}y_1^{\,5}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}+\ldots\right)-\frac{\partial y_1}{\partial t}=0$$

$$-(q_0+\beta)\frac{\partial \eta}{\partial x}-(l+\eta)\frac{\partial}{\partial x}(q_0+\beta)-\frac{\partial}{\partial t}(l+\eta)=0$$

$$-q_0\frac{\partial \eta}{\partial x}-l\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \eta}{\partial t}=0$$

$$\therefore q_0\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial t}+l\frac{\partial \beta}{\partial x}=0$$

De ahí que se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} q_0\dfrac{\partial \beta}{\partial x}+\dfrac{\partial \beta}{\partial t}+g\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=0 \\ q_0\dfrac{\partial \eta}{\partial x}+\dfrac{\partial \eta}{\partial t}+l\dfrac{\partial \beta}{\partial x}=0 \end{cases}$$

El mismo que matricialmente y suponiendo que $\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = \dfrac{\partial \beta}{\partial t} = 0$ sería:

$$\begin{pmatrix} q_0 & g \\ l & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \beta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Evitando la solución trivial, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} q_0 & g \\ l & q_0 \end{vmatrix} = 0 \to q_0^2 - gl = 0 \to q_0 = \sqrt{gl}$$

$$\to q_0 \frac{\partial \beta}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \to \sqrt{gl} \frac{\partial \beta}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \to \sqrt{gl} \frac{\partial \beta}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \to \sqrt{gl} \partial \beta = -g \partial \eta$$

$$\to \int \sqrt{gl} \partial \beta = -\int g \partial \eta \to \sqrt{gl} \beta = -g\eta + k \to \sqrt{gl} \beta = -g(\eta + \alpha) \to \beta = -\frac{g}{\sqrt{gl}}(\eta + \alpha)$$

$$\to \beta = -\frac{g}{q_0}(\eta + \alpha) \to \beta = -\frac{g q_0}{q_0^2}(\eta + \alpha) \to \beta = -\frac{g q_0}{gl}(\eta + \alpha)$$

$$\therefore \beta = -\frac{q_0}{l}(\eta + \alpha)$$

Donde α es una constante arbitraria muy pequeña.

Es evidente que esta solución coincide con la usualmente dada para el caso de ondas largas de forma arbitraria hecha estacionaria ya que se atribuye al fluido una velocidad igual y opuesta a la dada por la onda, en base a la suposición de que la velocidad en una dirección vertical podría ser dejada y que la velocidad horizontal podría ser considerada uniforme a lo largo de cada sección del canal.

Para proceder con una segunda aproximación, debemos considerar la expresión:

$$f = q_0 - \frac{q_0}{l}(\eta + \alpha + \gamma) \text{..........(13)}$$

Donde γ es muy pequeño comparado con η y α.

Derivando la ecuación (13) con respecto a x se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)$$

Sustituyendo (13) y su derivada en (11) y (12), tenemos:

$$\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)+\left(q_0-\frac{q_0}{l}(\eta+\alpha+\gamma)\right)\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}(l+\eta)^2\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}(l+\eta)^2\left(q_0-\frac{q_0}{l}(\eta+\alpha+\gamma)\right)\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right)-\frac{1}{2}(l+\eta)^2\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial^3\gamma}{\partial t\partial x^2}\right)-(l+\eta)^2\frac{q_0}{l}$$
$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)+\ldots-g\frac{\partial\eta}{\partial x}-(l+\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(q_0-\frac{q_0}{l}(\eta+\alpha+\gamma)\right)\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)$$
$$-(l+\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial t\partial x}\right)-(l+\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right)^2+\ldots+\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0$$

Escogiendo términos y eliminando los considerados despreciables como $\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ y $\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^3$ que son rechazados en comparación a $\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}$ las cuales se mantiene en las ecuaciones, $\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ y $\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial t}$ contra $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, tenemos:

$$\frac{q_0}{l}\frac{\partial\eta}{\partial t}+g\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{g}{l}(\eta+\alpha)\frac{\partial\eta}{\partial x}-\left(\frac{1}{2}l^2g-\frac{T}{\rho}\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0\text{...........(14)}$$

De la misma manera:

$$-\left(q_0-\frac{q_0}{l}(\eta+\alpha+\gamma)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(l+\eta)^2\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)\right)+\frac{1}{24}(l+\eta)^4\left(-\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\gamma}{\partial x^4}\right)+\ldots\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$
$$+\left((l+\eta)\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)-\frac{1}{6}(l+\eta)^3\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\gamma}{\partial x^3}\right)\right)-\frac{1}{120}(l+\eta)^5\left(-\frac{q_0}{l}\left(\frac{\partial^5\eta}{\partial x^5}+\frac{\partial^5\gamma}{\partial x^5}\right)+\ldots\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial t}=0$$

Esta última expresión la multiplicamos por $-\frac{q_0}{l}$ y nuevamente escogiendo términos y eliminando los despreciables, tenemos:

$$\frac{q_0}{l}\frac{\partial\eta}{\partial t}-g\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{g}{l}(2\eta+\alpha)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{1}{6}l^2g\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=$$
$$0\text{.........(15)}$$

Sumando las ecuaciones (14) y (15) tenemos:

$$2\frac{q_0}{l}\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{g}{l}(3\eta+2\alpha)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(-\frac{1}{3}l^2g+\frac{T}{\rho}\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0$$

Multiplicando esta última expresión por $-\frac{l}{g}$ tenemos:

$$-2\frac{q_0}{g}\frac{\partial\eta}{\partial t}+(3\eta+2\alpha)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{1}{3}l^3-\frac{Tl}{\rho g}\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0$$

Haciendo que: $\sigma=\frac{1}{3}l^3-\frac{Tl}{\rho g}$, tenemos:

$$-2\frac{q_0}{g}\frac{\partial\eta}{\partial t}+(3\eta+2\alpha)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sigma\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0$$

Despejando $\frac{\partial\eta}{\partial t}$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\frac{g}{q_0}\left(\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{2}{3}\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)$$

Y ya que $q_0=\sqrt{gl}$, finalmente tenemos:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\frac{q_0}{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)(16)$$

La ecuación (16) indica la deformación de un sistema de ondas arbitrarias pero que se mueven en una dirección única. Antes de utilizarlas se debería puntualizar la relación entre la constante α, la cual podría ser elegida arbitrariamente y la velocidad uniforme dada por el fluido. Además, la variación de la constante α, es decir δ_α corresponde a la relación $\delta_q=-\frac{q_0}{l}\delta_\alpha$ en su velocidad, y tomando la variación con respecto a α en (16), tenemos que:

$$\delta\frac{d\eta}{dt}=\frac{q_0}{l}\delta_\alpha\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\delta_q\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

3. ONDAS ESTACIONARIAS.

Para ondas estacionarias $\frac{\partial\eta}{\partial t}=0$, de ahí que:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{3}{2}\frac{q_0}{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)=0$$

Por lo tanto:

$$\partial_x\left(\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)=0$$

Integrando:

$$\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=-c_1$$

$$c_1+\frac{1}{2}\eta^2+\frac{2}{3}\alpha\eta+\frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0$$

Multiplicando por $6\partial\eta$:

$$6c_1\partial\eta+3\eta^2\partial\eta+4\alpha\eta\partial\eta+2\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\partial\eta=0$$

Integrando:

$$c_2+6c_1\eta+\eta^3+2\alpha\eta^2+\sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2=0$$

Si se considera que el fluido está quieto en el infinito, tenemos que $c_1=c_2=0$ ya que $\eta=0,\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0$. Por lo tanto:

$$\eta^3+2\alpha\eta^2+\sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2=0$$

$$\sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2=-\eta^3-2\alpha\eta^2$$

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2=-\frac{\eta^3+2\alpha\eta^2}{\sigma}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\pm\sqrt{-\frac{\eta^3+2\alpha\eta^2}{\sigma}}=\pm\sqrt{\frac{-\eta^2(\eta+2\alpha)}{\sigma}}$$

i) Para $\sigma>0$, se debe cumplir que $\eta+2\alpha<0,\forall\eta<\varepsilon\rightarrow\alpha<0$

Siendo $h=-2\alpha$, tenemos:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\pm\sqrt{\frac{\eta^2(-\eta+h)}{\sigma}}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\pm\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\eta\sqrt{h-\eta}.......(17)$$

Esto último es una ecuación separable:

$$\int\frac{d\eta}{\eta\sqrt{h-\eta}}=\pm\int\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\partial x$$

Resolviendo la integral del lado izquierdo de la ecuación tenemos:

Cambio de variable:

$$t=\sqrt{h-\eta}$$

$$dt=-\frac{1}{2\sqrt{h-\eta}}d\eta$$

$$\rightarrow\int\frac{d\eta}{\eta\sqrt{h-\eta}}=-2\int\frac{dt}{h-t^2}$$

Aplicando *descomposición en fracciones parciales*:

$$\frac{1}{h-t^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{h}+t\right)\left(\sqrt{h}-t\right)}=\frac{A}{\left(\sqrt{h}+t\right)}+\frac{B}{\left(\sqrt{h}-t\right)}$$

$$1=A\left(\sqrt{h}-t\right)+B\left(\sqrt{h}+t\right)$$

$$Si:t=\sqrt{h}\rightarrow1=2B\sqrt{h}\rightarrow B=\frac{1}{2\sqrt{h}}$$

$$Si:t=-\sqrt{h}\rightarrow1=2A\sqrt{h}\rightarrow A=\frac{1}{2\sqrt{h}}$$

Por lo tanto:

$$\rightarrow \int \frac{d\eta}{\eta\sqrt{h-\eta}} =$$

$$-2\int \frac{dt}{h-t^2} =$$

$$-2\int \left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{h}}}{\left(\sqrt{h}+t\right)} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{h}}}{\left(\sqrt{h}-t\right)} \right] dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \int \left[-\frac{1}{\left(\sqrt{h}+t\right)} - \frac{1}{\left(\sqrt{h}-t\right)} \right] dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h}} \int \left[\frac{1}{\left(t-\sqrt{h}\right)} - \frac{1}{\left(t+\sqrt{h}\right)} \right] dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \left[\ln\left|t-\sqrt{h}\right| - \ln\left|t+\sqrt{h}\right| \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \ln\left| \frac{t-\sqrt{h}}{t+\sqrt{h}} \right|$$

Esto quiere decir que:

$$\int \frac{d\eta}{\eta\sqrt{h-\eta}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \ln\left| \frac{t-\sqrt{h}}{t+\sqrt{h}} \right| = \pm\int \sqrt{\frac{1}{\sigma}} dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} \ln\left| \frac{t-\sqrt{h}}{t+\sqrt{h}} \right| = \pm\sqrt{\frac{1}{\sigma}} x$$

$$\rightarrow \ln\left| \frac{t-\sqrt{h}}{t+\sqrt{h}} \right| = \pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}} x$$

$$\rightarrow \frac{t-\sqrt{h}}{t+\sqrt{h}} = e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x} \rightarrow t-\sqrt{h} = \left(t+\sqrt{h}\right) e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}$$

$$\rightarrow t-\sqrt{h} = e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x} t + \sqrt{h} e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}$$

$$\rightarrow t - e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x} t = \sqrt{h} + \sqrt{h} e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}$$

$$\rightarrow \left(1 - e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x} \right) t = \left(1 + e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x} \right) \sqrt{h}$$

$$t = \frac{\left(1 + e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x} \right)}{\left(1 - e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x} \right)} \sqrt{h} \rightarrow \sqrt{h-\eta} = \left(\frac{1 + e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}}{1 - e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}} \right) \sqrt{h}$$

$$\rightarrow h-\eta = \left(\frac{1 + e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}}{1 - e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}} \right)^2 h$$

$$\eta = h - \left(\frac{1 + e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}}{1 - e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}} \right)^2 h$$

$$\rightarrow \eta = h\left[1 - \left(\frac{1 + e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}}{1 - e^{\pm\sqrt{\frac{h}{\sigma}}x}} \right)^2 \right] \rightarrow \eta = h\left[1 - \left(\tanh\left(\sqrt{\frac{h}{4\sigma}} x \right) \right)^2 \right]$$

$$\therefore \eta = h \sec h^2 \left(\sqrt{\frac{h}{4\sigma}} x \right)$$

ii) Considerando $\sigma < 0$, se tiene por la misma razón dada anteriormente que $2\alpha > 0$ por lo que sustituyendo adecuadamente en la expresión (17) $-\eta^{'}$ por η:

$$\frac{\partial \eta^{'}}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{1}{-\sigma}} \eta^{'} \sqrt{h-\eta^{'}}$$

Obteniéndose:

$$\eta = \eta^{'} = -h \sec h^2 \left(\sqrt{\frac{h}{-4\sigma}} x \right)$$

La ecuación anterior produce la onda solitaria negativa siempre que $\sigma < 0$, es decir:

$$\sigma = \frac{1}{3} l^3 - \frac{Tl}{\rho g}$$

$$\frac{1}{3} l^3 - \frac{Tl}{\rho g} < 0$$

$$l^2 < \frac{3T}{\rho g}$$

$$\therefore l < \sqrt{\frac{3T}{\rho g}}$$

Por ejemplo, en agua a 20ºc la profundidad límite es 0.47 cm ($T = 72$, $g = 981$, $\rho = 0.998 B.A.U.$).

Consideremos ahora que en el infinito se tiene que $\eta = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ y por lo tanto la ecuación

$$c_2 + 6c_1\eta + \eta^3 + 2\alpha\eta^2 + \sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = 0$$

produce que $c_2 = 0$, quedando:

$$6c_1\eta + \eta^3 + 2\alpha\eta^2 + \sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = 0$$

En el supuesto que $\sigma > 0$, entonces $c_1 < 0$ para garantizar que $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ tenga valores reales para valores pequeños de η.

$$\sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = -\left(6c_1\eta + \eta^3 + 2\alpha\eta^2\right)$$

Ahora:

$$6c_1\eta + \eta^3 + 2\alpha\eta^2 + \sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = 0$$

$$\eta\left(6c_1 + \eta^2 + 2\alpha\eta\right) + \sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Como $c_1 < 0$ entonces:

$$\eta^2 + 2\alpha\eta + 6c_1 = 0$$

Tiene 2 soluciones; una positiva h y una negativa $-k$.

Por lo que:

$$\eta\left(\eta^2 + 2\alpha\eta + 6c_1\right) + \sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = 0$$

$$\eta(\eta - h)(\eta + k) + \sigma\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = -\frac{1}{\sigma}\eta(\eta - h)(\eta + k)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \pm\sqrt{-\frac{1}{\sigma}\eta(\eta - h)(\eta + k)}$$

Haciendo cambio de variable:

$$\eta = h\cos^2\chi \rightarrow \frac{\partial\eta}{\partial x} = -2h\cos\chi sen\chi\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

Tenemos:

$$-2h\cos\chi sen\chi\frac{\partial\chi}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{1}{\sigma}h\cos^2\chi\left(h - h\cos^2\chi\right)\left(k + h\cos^2\chi\right)}$$

$$-2h\cos\chi sen\chi\frac{\partial\chi}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{1}{\sigma}h\cos^2\chi \cdot hsen^2\chi\left(k + h\cos^2\chi\right)}$$

$$-2h\cos\chi sen\chi\frac{\partial\chi}{\partial x} = \pm h\cos\chi \cdot sen\chi\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\sqrt{\left(k + h\cos^2\chi\right)}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \mp\sqrt{\frac{1}{4\sigma}}\sqrt{\left(k + h\cos^2\chi\right)}$$

$$\frac{d\chi}{\sqrt{\left(k + h\cos^2\chi\right)}} = \mp\sqrt{\frac{1}{4\sigma}}dx$$

Integrando tenemos:

$$\int\frac{d\chi}{\sqrt{\left(k + h\cos^2\chi\right)}} = \mp\int\sqrt{\frac{1}{4\sigma}}dx$$

$$\int\frac{d\chi}{\sqrt{\left(k + h\cos^2\chi\right)}} = \mp\sqrt{\frac{1}{4\sigma}}x$$

Del lado izquierdo tenemos una integral elíptica de primera especie. Lo cual da como resultado:

$$\eta = hcn^2\left(x\sqrt{\frac{h+k}{4\sigma}}, \sqrt{\frac{h}{h+k}}\right)$$

Lo cual es un conjunto de funciones cnoidales.

4. ONDAS ESTACIONARIAS PERIÓDICAS (CNOIDAL WAVES)

A partir de las ecuaciones (14) y (15) calculemos el valor de γ:

$$\frac{q_0}{l}\frac{\partial\eta}{\partial t} + g\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{g}{l}(\eta + \alpha)\frac{\partial\eta}{\partial x} - \left(\frac{1}{2}l^2 g - \frac{T}{\rho}\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{q_0}{l}\frac{\partial\eta}{\partial t} - g\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{g}{l}(2\eta + \alpha)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{1}{6}l^2 g\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0$$

Restando las ecuaciones:

$$2g\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{g}{l}(\eta + \alpha - 2\eta - \alpha)\frac{\partial\eta}{\partial x} - \left(\frac{1}{2}l^2 g - \frac{T}{\rho} + \frac{1}{6}l^2 g\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0$$

$$2g\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{g\eta}{l}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \left(\frac{2}{3}l^2 g - \frac{T}{\rho}\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0$$

Dividiendo para $2g$:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\eta}{2l}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{T}{2g\rho}\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = -\frac{\eta}{2l}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{T}{2g\rho}\right)\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}$$

Integrando:

$$\gamma = -\frac{\eta^2}{4l} + \left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{T}{2g\rho}\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + c$$

Debido a que el valor de la constante arbitraria α cambiaría por $\alpha + c$ en ecuación (13), se considera $c = 0$, entonces:

$$\gamma = -\frac{\eta^2}{4l} + \left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{T}{2g\rho}\right)\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$

De la ecuación

$$c_1 + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0,$$

despejando $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ se tiene:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{-c_1 - \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{2}{3}\alpha\eta}{\frac{1}{3}\sigma} =$$

$$\frac{\frac{-6c_1 - 3\eta^2 - 4\alpha\eta}{6}}{\frac{1}{3}\sigma} =$$

$$-\frac{1}{2\sigma}\left(3\eta^2 + 4\alpha\eta + 6c_1\right)$$

Como se consideró que:

$$\eta^2 + 2\alpha\eta + 6c_1 = (\eta - h)(\eta + k)$$

$$\eta^2 + 2\alpha\eta + 6c_1 = \eta^2 + (k - h)\eta - hk$$

$$\rightarrow 2\alpha = k - h, 6c_1 = -hk$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\sigma}\left(3\eta^2 + 2(k-h)\eta - hk\right) =$$

$$-\frac{1}{2\sigma}\left(3\eta^2 - 2(h-k)\eta - hk\right)$$

Por lo que:

$$\gamma = -\frac{\eta^2}{4l} + \left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{T}{2g\rho}\right)\left(-\frac{1}{2\sigma}\right)\left(3\eta^2 - 2(h-k)\eta - hk\right)$$

Por lo tanto:

$$f = q_0 - \frac{q_0}{l}(\eta + \alpha + \gamma)$$

$$f = q_0 - \frac{q_0}{l}\left[\begin{array}{l}\eta + \alpha - \frac{\eta^2}{4l} + \\ \left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{T}{2g\rho}\right)\left(-\frac{1}{2\sigma}\right)\left(3\eta^2 - 2(h-k)\eta - hk\right)\end{array}\right]$$

Obteniendo que:

$$u = \sqrt{gl} - \frac{\sqrt{gl}}{l}\left[\begin{array}{l}\eta + \frac{1}{2}(k-h) - \frac{\eta^2}{4l} + \\ \left(\frac{1}{l} + \frac{T}{2g\rho\sigma}\right)\left(-\frac{3}{2}\eta^2 + (h-k)\eta + \frac{1}{2}hk\right)\end{array}\right] + y^2$$

$$\frac{1}{2\sigma}\frac{\sqrt{gl}}{l}\left(-\frac{3}{2}\eta^2 + (h-k)\eta + \frac{1}{2}hk\right) + \ldots$$

$$v = y\sqrt{\frac{g\eta(h-\eta)(k+\eta)}{l\sigma}}\ldots$$

Es importante indicar que si $k = 0$ implica que $c_1 = 0$ por lo cual, las ecuaciones determinan el movimiento de un fluido para un solitón.

5. CONCLUSIONES

La ecuación KdV tiene un sentido físico universal y puede ser aplicada en todas las situaciones donde aparecen simultáneamente por un lado efectos no lineales, que tienden a volcar la onda, y por otro lado la dispersión débil, que tiende a separar las componentes de la onda de acuerdo con su frecuencia y de esta manera tiende a suavizar la onda. Entonces, un Soliton aparece como una situación de equilibrio entre la no linealidad y la dispersión, que se compensan. El descubrimiento del Soliton sirvió como un impulso a una teoría matemática reciente que se aplica para resolver las ecuaciones diferenciales no lineales. Por otro lado, la popularidad de los Solitones condujo a su detección en áreas distintas a la hidrodinámica. Por ejemplo, recientemente se dieron a conocer los trabajos de los laboratorios Bell para mejorar el rendimiento de las transmisiones en las redes ópticas de telecomunicaciones a distancias muy grandes con el uso de Solitones ópticos. En la transferencia de señales comunes a través de fibras ópticas, por cada 100 km, es necesario amplificar la señal, y después de cada 500 km poner un reproductor, el cual transforma las señales ópticas en eléctricas y luego otra vez a ópticas para así poder transferirlas más adelante. Sin estas medidas la señal se deforma irreconociblemente. Los Solitones ópticos encontraron una aplicación práctica con el primer equipo de telecomunicaciones, que los utilizaba para transporte de tráfico real de señales sobre una red comercial en distancias de más de 14,000 km.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1]. Korteweg, D. J. and de Vries, F. "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves." Philos. Mag. 39, 422-443, 1895.

[2]. Boyd, J. P. "Solitons from Sine Waves: Analytical and Numerical Methods of Non-Integrable Solitary and Cnoidal Waves." Physica D 21, 227-246, 1986.

[3]. Gardner, C. S. "The Korteweg-de Vries Equation and Generalizations, IV. The Korteweg-de Vries Equation as a Hamiltonian System." J. Math. Phys. 12, 1548-1551, 1971.

[4]. Lax, P. "Integrals of Nonlinear Evolution Equations and Solitary Waves." Comm. Pure Appl. Math. 21, 467-490, 1968.

[5]. Miles, J. W. "The Korteweg-de Vries Equation, A Historical Essay." J. Fluid Mech. 106, 131-147, 1981.

[6]. Miura, R. M. "Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. I. A Remarkable Explicit Nonlinear Transformation." J. Math. Phys. 9, 1202-1204, 1968.

[7]. Russell, J. S. "Report on Waves." Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London: John Murray, pp. 311-390, 1844.