Matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2016, Vol. 14, No. 1

PRINCIPIOS DE MECANICA NEWTONIANA, SEGUNDA PARTE

SANCHEZ HERNANDO[1]

Resumen: *En este escrito continuamos la presentación iniciada en artículo anterior con el mismo nombre. Se pretende ahora presentar las características que tiene el movimiento de cuerpos no tan pequeños como los electrones ni tan veloces en comparación con la velocidad de la luz. Se analiza en esta Segunda Parte las relaciones con las que podemos describir el movimiento de los cuerpos. Se hace uso de los sistemas de coordenadas mayormente empleados para describir movimientos y que permiten al estudiante de Física plantearse problemas relativamente interesantes y prácticos.*

Palabras Claves.- Mecánica, Movimiento, Partícula, Cinemática, Aceleración.

Abstract: *In this paper we continue presentation initiated in previous article with the same name. Intends to now introduce the features that the movement of bodies not as small as electrons or so fast compared to the speed of light. In this second part discusses relations with which we can describe the movement of bodies. It makes use of the coordinate systems mostly used to describe movements and allow the student of physics arise relatively interesting and practical problems..*

Keywords.- Mechanics , Motion, Particle, Kinematics, acceleration.

Recibido: Enero 2016
Aceptado: Marzo 2016

1. INTRODUCCIÓN

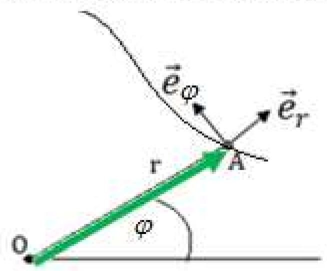
Los avances que ha tenido la humanidad se deben al dominio que ha hecho el hombre de las leyes de la naturaleza. Los pueblos más desarrollados son los que han logrado primero el manejo del conocimiento. La Física como ciencia de la naturaleza tiene como misión la de extraer cada vez más esos detalles que contiene la naturaleza y que podemos usar en provecho para el desarrollo de los pueblos.
A través de este texto no pretendemos presentar ningún descubrimiento, pero si contribuir a que las juventudes se motiven en el estudio de esta ciencia tan importante para los pueblos y que su dominio puede redundar en mejoras en el nivel de vida de los pueblos.
Queremos presentar al estudiante y al profesor de Física un enfoque, resultado de los años dedicados a enseñar Física a los estudiantes de la ESPOL. Estos años nos han mostrado que para enseñar Física hay que tener un buen conocimiento de ella, que la enseñanza no se quede en un reconocimiento de lo brillante que es la naturaleza, sino en entender el porque es así la naturaleza. Si la entendemos vamos a poder usar sus leyes en nuestro beneficio.
El material que queremos presentar tiene que ver con conceptos desarrollados en el siglo XVII y que actualmente tienen plena vigencia tanto para ingenieros o técnicos como para personas de áreas que necesiten un conocimiento formal del movimiento de cuerpos materiales. Por ejemplo podría ser de utilidad a un médico que estudie el movimiento de articulaciones, fluidos en el cuerpo humano o para un agrónomo que estudie el movimiento de fertilizantes en el suelo. Además quisiéramos que el profesor de universidad o de colegio tenga una herramienta que con la suficiente rigidez matemática explique y respalde los conocimientos que imparta en el aula de clase. Trataremos de la matemática necesaria para la explicación sea desarrollada paralelamente en la medida de la necesidad.

1.2.3 Velocidad en coordenadas polares.- En coordenadas polares la posición está dada por un vector que se dirige en la dirección radial por lo que no tendrá componente azimutal:

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(t) \qquad (3.11)$$

Matemáticamente es el producto de dos funciones del tiempo, la distancia al polo y la dirección radial.

Graf. 3.10 Posición en Coordenadas Polares



Para hallar la velocidad en este caso usaremos la regla 9:

$$\vec{v} = r\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\vec{e}_r \qquad (3.12)$$

La derivada del vector unitario radial $\vec{e}_r$ existe cuando el cuerpo sufre una variación angular de θ porque si este ángulo no cambia el vector radial seguiría igual. De ahí que ese vector depende del tiempo solo si $\varphi(t)$ es función del

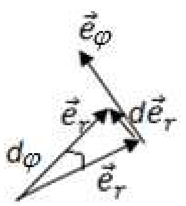
[1]*Sanchez Caicedo Hernando Profesor del Departamento de Física, FCNM, ESPOL (e-mail: hsanchez@espol.edu.ec) Guayaquil.*

tiempo: $\vec{e}_r(\varphi(t))$. Por lo tanto para derivar el vector radial debemos usar la regla 10:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \qquad (3.13)$$

La derivada de $\vec{e}_r$ con respecto al ángulo φ, del grafico 3.11 podemos apreciar que es un vector unitario en la dirección azimutal, tomando en cuenta que $d\varphi = |d\vec{e}_r|$:

Graf. 3.11 Direcciones en Coord. Polares



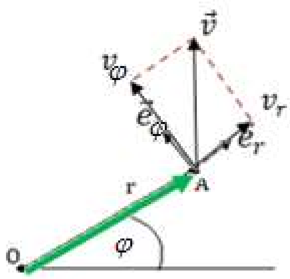
$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi \qquad (3.14)$$

De ahí que las componentes de la velocidad sean:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} \qquad (3.15)$$

Componentes: radial y azimutal de la velocidad.

Graf. 3.12 Velocidad en Coord. Polares



$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi \qquad (3.16)$$

Por ejemplo: Un móvil mientras se desplaza su posición está dada en coordenadas:

$$\begin{cases} r = 3t^2 + 5 \\ \varphi = 3t \end{cases} \qquad (3.17)$$

Entonces las componentes de la velocidad serán:

$$v_r = 6t \qquad v_\varphi = (3t^2 + 5)3 \qquad (3.18)$$

De manera que la velocidad toma la forma:

$$\vec{v} = 6t\vec{e}_r + (9t^2 + 15)\vec{e}_\varphi \qquad (3.19)$$

1.2.4 Velocidad en coordenadas naturales.- En coordenadas naturales es fácil escribir la velocidad porque sabemos la velocidad es siempre tangente a la trayectoria, es decir la velocidad tendrá una sola componente:

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \quad \wedge \quad v = \frac{ds}{dt} \qquad (3.20)$$

donde v es la rapidez del movimiento.

Aquí hemos usado el hecho que se desprende de la definición de la velocidad; la rapidez es la magnitud de la velocidad.

Como ejemplo veamos un móvil desplazándose en una determinada trayectoria de manera que la distancia al punto de referencia varía con el tiempo:

$$s(t) = 3t^2 + 5t - 2 \qquad (3.21)$$

Su rapidez la obtendríamos derivando s(t):

$$v = 6t + 5 \qquad (3.22)$$

Y su velocidad será:

$$\vec{v} = (6t + 5)\vec{\tau} \qquad (3.23)$$

1.2.5 Velocidad en coordenadas cilíndricas.- Partimos otra vez de la definición de velocidad: es la derivada de la posición con respecto al tiempo. La posición en coordenadas cilíndricas se la expresa como la suma de dos componentes:

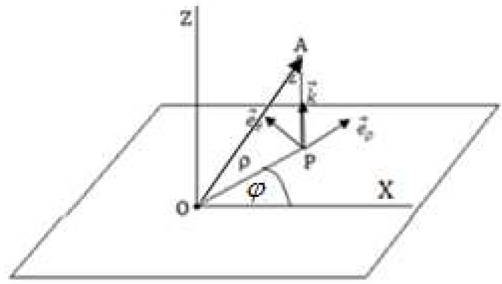
$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} \qquad (3.24)$$

En esta expresión $\rho(t), \vec{e}_\rho(t), z(t)$ son funciones del tiempo, aunque la dependencia de $\rho(t)$ es a través de $\varphi(t)$. Usando las reglas de derivación:

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (3.25)$$

Y usando las relaciones (3.13) y (3.14) que obtuvimos en coordenadas polares para la dirección radial:

Graf. 3.13 Coordenadas cilíndricas



$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (3.26)$$

De manera que la velocidad tendrá tres componentes perpendiculares entre sí:

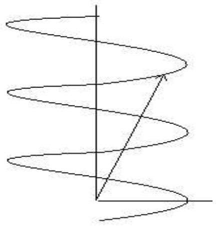
$$\begin{cases} v_\rho = \dfrac{d\rho}{dt} \\ v_\varphi = \rho\dfrac{d\varphi}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases} \qquad (3.27)$$

Por ejemplo: El movimiento de un cuerpo descrito en coordenadas cilíndricas se expresa:

$$\begin{cases} \rho = 10\ m \\ \varphi = 5t \\ z = 3t \end{cases} \qquad (3.28)$$

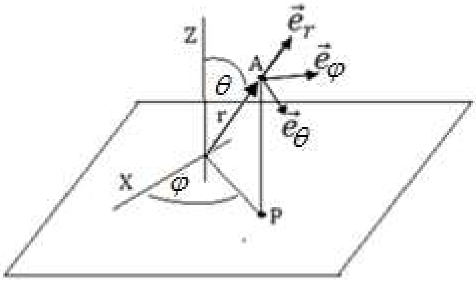
Corresponde a un móvil que se desplaza por una espiral ascendente dentro de un cilindro de 10 m de radio.

Graf. 3.14 Ejemplo de Coord. Cilíndricas



Su velocidad tendrá las siguientes componentes:

Graf. 3.14 Posición en Coord. Esféricas



$$\begin{cases} v_\rho = 0 \\ v_\varphi = 10(5) = 50\,m/s \\ v_z = 3\,m/s \end{cases} \qquad (3.29)$$

1.2.6 Velocidad en coordenadas esféricas.- De la definición de velocidad: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ y tomando en cuenta que la posición en coordenadas esféricas tendría solo componente radial:

$$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r = r(t)\vec{e}_r(t) \qquad (3.30)$$

Entonces usando la regla 9 de derivación se obtiene:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \qquad (3.31)$$

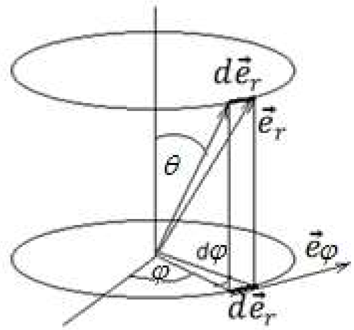
En coordenadas esféricas la dependencia con el tiempo de la dirección radial se manifiesta al variar tanto el ángulo φ como el ángulo θ: $\vec{e}_r(\varphi(t), \theta(t))$.

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad (3.32)$$

Si hacemos variar solo el ángulo φ, del gráfico 3.15 se nota que:

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \sin(\theta)\,\vec{e}_\varphi \qquad (3.33)$$

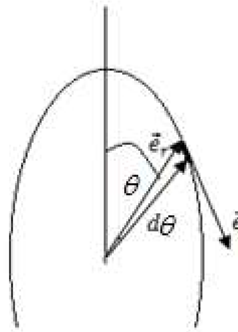
Graf. 3.15 Variación del ángulo φ.



De igual manera el cambio en $\vec{e}_r$ por la variación del ángulo θ lo calcularemos haciendo variar θ manteniendo fijo a φ.

Del grafico 3.16 podemos apreciar que:

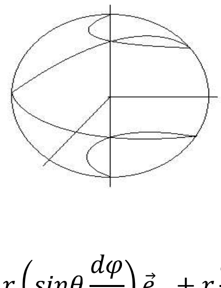
Graf. 3.16 Variación del ángulo φ.



$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \qquad (3.34)$$

De manera que la velocidad en coordenadas esféricas tendrá las siguientes componentes:

Graf. 3.17 Ejemplo de Coord. Esféricas



$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\left(\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e}_\varphi + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \qquad (3.35)$$

$$\begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt} \\ v_\varphi = r sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \\ v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \end{cases} \qquad (3.36)$$

Por ejemplo: La posición de una partícula en coordenadas esféricas está dada por

$$\begin{cases} r = R \\ \varphi = \pi sin \frac{\pi t}{120} \\ \theta = \frac{\pi t}{10} \end{cases} \qquad (3.37)$$

Representa una partícula moviéndose sobre una esfera, rotando y desplazándose hacia abajo. Las componentes de la velocidad en cualquier punto serán:

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\varphi = R sin \frac{\pi t}{10}\left(\frac{\pi^2}{120} cos \frac{\pi t}{120}\right) \\ v_\theta = R\frac{\pi}{10} \end{cases} \qquad (3.38)$$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\varphi = \frac{\pi^2 R}{120} sin \frac{\pi t}{10} cos \frac{\pi t}{120} \\ v_\theta = \frac{\pi R}{10} \end{cases} \qquad (3.39)$$

No existe velocidad radial ya que la distancia al centro se mantiene constante. Rota en forma uniforme alrededor del eje vertical ya que la componente v_φ es constante.

2. ACELERACION Y CAMBIOS DE MOVIMIENTO

2.1 Aceleración.- El movimiento de un cuerpo puede sufrir cambios en la trayectoria. Esto puede manifestarse ya sea porque cambia la rapidez del movimiento o porque suceda cambios en su orientación. De ahí que si queremos medir los cambios de velocidad o cambios en el movimiento debemos introducir una cantidad vectorial que aprecie estos cambios. Esta cantidad la denominaremos aceleración.

Aceleración.- Cantidad física vectorial que mide los cambios en la velocidad. Por definición aceleración es la derivada matemática de la velocidad:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (4.1)$$

Así como la velocidad tiene sus componentes según el sistema de coordenadas que usemos la aceleración tendrá sus componentes. El significado de sus componentes dependerá del sistema que estemos usando, aunque todas se refieran a cambios en características de la velocidad.

2.1.1 Aceleración en coordenadas rectangulares.- En coordenadas rectangulares la velocidad mide los cambios que sufren las proyecciones de la posición sobre los ejes rectangulares. De igual manera la aceleración tendrá sus respectivas componentes:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} =$$

$$0 = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \qquad (4.2)$$

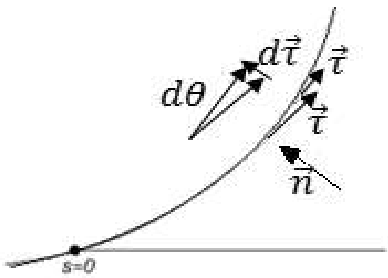
La componente a_x refleja los cambios que sufre la componente v_x de la velocidad y así cada componente de la aceleración. En el ejemplo que habíamos propuesto:

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x = 10t \\ v_y = 4\cos(t) \\ v_z = -4\sin(t) \end{cases} \rightarrow \qquad (4.3)$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} v_x = 10 \ {}^{m}/_{s^2} \\ v_y = 4\cos(t) \\ v_z = -4\sin(t) \end{cases} \qquad (4.4)$$

2.1.2 Aceleración en coordenadas naturales.- En coordenadas naturales hay que tener en cuenta que las direcciones dependen del tiempo. Para la aceleración es necesario conocer la derivada del vector tangencial, tomando en cuenta que este vector cambia porque la dirección θ cambia:

Graf. 4.1 Direcciones en C. Naturales



$$\vec{\tau}(\theta(t)) \;\rightarrow\; \frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{d\vec{\tau}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{n} \qquad (4.5)$$

Nótese del grafico 4.1 que el cambio de $\vec{\tau}$ sigue la dirección del vector $\vec{n}$.
De esta manera la aceleración en este sistema de coordenadas tendrá dos componentes:

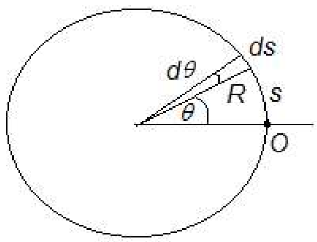
$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+v\frac{d\theta}{dt}\vec{n} \qquad (4.6)$$

Es decir la aceleración tiene una componente tangencial y una componente normal:

$$a_\tau=\frac{dv}{dt} \qquad a_n=v\frac{d\theta}{dt} \qquad (4.7)$$

Si la trayectoria fuese una circunferencia de radio R entonces podríamos establecer una relación de la derivada $\frac{d\theta}{dx}$ con la rapidez:

Graf. 4.2 Movimiento circular



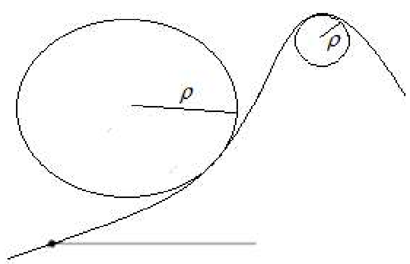
$$ds=Rd\theta \rightarrow v=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt} \qquad (4.8)$$

Esta relación permite expresar la aceleración normal como:

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad (4.9)$$

Esta relación válida para el movimiento circular se la puede usar para cualquier trayectoria. Para eso en cada punto de la trayectoria trazaremos una circunferencia tangente a la trayectoria y que esté de acuerdo con su curvatura como muestra el grafico 4.3.

Graf. 4.3 Radio de curvatura



Este radio tendría un valor variable y que llamaremos radio de curvatura ρ:

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\rho \qquad (4.10)$$

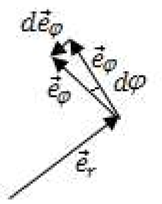
2.1.3 Aceleración en coordenadas polares.-
En coordenadas polares hay que tomar en cuenta los cambios que sufren las orientaciones:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi \qquad (4.11)$$

$$donde\;\; \vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

La orientación radial obedece a la relación (25). Para obtener la variación que sufre la dirección azimutal observemos el gráfico 4.4:

Graf. 4.4 Direcciones en C. Polares



El cambio de la dirección azimutal sigue la dirección contraria de la dirección radial:

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}=\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-\vec{e}_r\frac{d\varphi}{dt} \qquad (4.12)$$

Y usando las reglas de derivación:

$$\vec{a}=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt}+\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

$$+r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi+r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \qquad (4.13)$$

Al incluir las derivadas de las direcciones obtendremos:

$$\vec{a}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r+$$

$$+\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e}_\varphi \qquad (4.14)$$

Es de anotar que a la distancia r la hemos tenido que derivar dos veces lo que se ha anotado con la representación: $\frac{d^2r}{dt^2}$ $(segunda\ derivada)$.
Tendremos entonces una componente de la aceleración en la dirección radial y otra para la dirección azimutal.
De estos términos algunos tienen importancia especial, por ejemplo el término $-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ es importante en el movimiento circular, es decir si $r = const$, $\varphi = \varphi(t)$, este término se lo denomina aceleración centrípeta. El termino $2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$ que sigue la dirección azimutal, se presenta cuando $r = r(t)$ y $\varphi = \varphi(t)$. Es conocido como aceleración de Coriolis.
En el ejemplo propuesto para la velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{v} = 6t\vec{e}_r + (9t^2 + 15)\vec{e}_\varphi \qquad (4.15)$$

Su derivada nos daría la aceleración:

$$\vec{a} = 6\vec{e}_r + 6t\frac{d\vec{e}_r}{dt} + (18t)\vec{e}_\varphi + +(9t^2 + 15)\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \qquad (4.16)$$

Esta expresión cambia al reemplazar las derivadas de las direcciones:

$$\vec{a} = (-9 - 9t^2)\vec{e}_r + \left(18t + 6t\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e}_\varphi = -(9 + 9t^2)\vec{e}_r + (36t)\vec{e}_\varphi \qquad (4.17)$$

Aquí usamos el valor de $\varphi = 3t$ dado en el ejemplo.

2.1.4 Aceleración en coordenadas cilíndricas.-
Usaremos en este sistema de coordenadas derivadas de las direcciones similares a las obtenidas para coordenadas polares:

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_r \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \qquad (4.18)$$

Por lo que partiendo de la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (4.19)$$

La aceleración tendrá las siguientes componentes:

$$\vec{a} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (4.20)$$

Al reemplazar en esta expresión las derivadas de las direcciones nos da:

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (4.21)$$

Las tres componentes de la aceleración. Igual que en coordenadas polares se observa la aceleración centrípeta, $-\rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ y la aceleración de Coriolis, $2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$.

En el ejemplo propuesto para la velocidad en coordenadas cilíndricas teníamos (3.28):

$$\begin{cases} \rho = 10\ m \\ \varphi = 5t \\ z = 3t \end{cases} \qquad \vec{v} = 50\vec{e}_\varphi + 3\vec{k}$$

Su aceleración tendrá la siguiente expresión:

$$\vec{a} = 50\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = 50\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -(50)(5)\vec{e}_\rho$$

Este móvil solo experimenta una aceleración radial constante de $250\ {}^{m}/_{s^2}$ dirigida hacia adentro de la espiral.

2.1.5 Aceleración en coordenadas esféricas.-
De igual manera para encontrar la aceleración en coordenadas esféricas hay que tomar en cuenta las derivadas de las direcciones (3.32):

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = = sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \qquad (4.22)$$

$$\vec{e}_\varphi(\varphi(t)) \to \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \qquad (4.23)$$

$$\vec{e}_\theta(\varphi(t), \theta(t)) \to$$

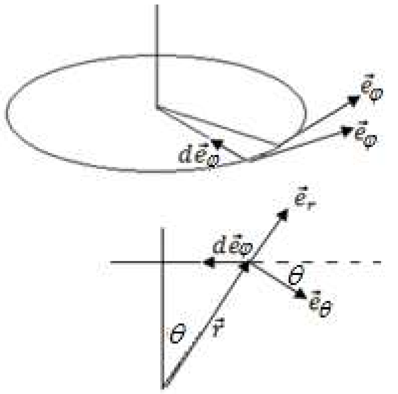
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \qquad (4.24)$$

Para el vector $\vec{e}_\varphi$ hemos tomado en cuenta que él puede variar solo si varía el ángulo φ. En cambio el vector $\vec{e}_\theta$ puede cambiar si cambia φ o si cambia θ.

Haciendo variar solo el ángulo φ en el gráfico 4.5 observamos que el cambio que sufre la dirección $\vec{e}_\varphi$ se la tiene que descomponer en dos componentes, una en la dirección $-\vec{e}_r$ y otra en la dirección $-\vec{e}_\theta$.

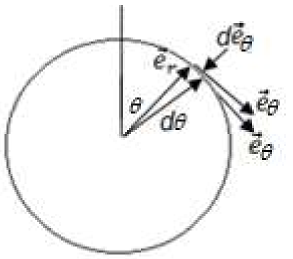
$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = (-sin\theta\vec{e}_r - cos\theta\vec{e}_\theta)\frac{d\varphi}{dt} \qquad (4.25)$$

Graf. 4.5 Cambios de dirección en Coordenadas Esféricas



Para el vector $\vec{e}_\theta$ primero observaremos su cambio en el grafico 4.6 cuando cambia el

Graf. 4.6 Cambios de dirección θ si el ángulo θ cambia.



ángulo θ.

En el grafico apreciamos que la dirección del cambio de θ es contraria a la dirección radial:

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r \qquad (4.26)$$

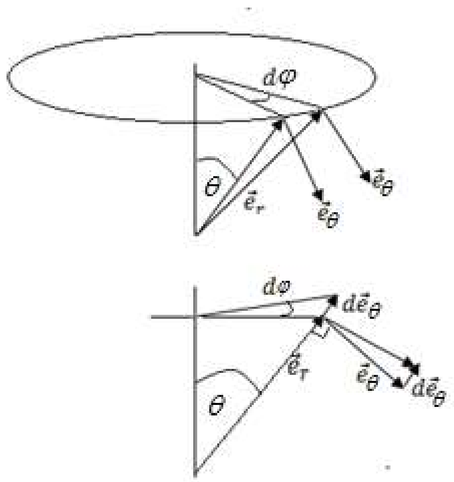
Ahora observemos el cambio de $\vec{e}_\theta$ en función del cambio del ángulo φ, manteniendo fijo el ángulo θ. En el grafico 4.7 podemos apreciar:

$$d\varphi = \frac{|d\vec{e}_\theta|}{|\vec{e}_r|cos\theta} = \frac{|d\vec{e}_\theta|}{cos\theta} \qquad (4.27)$$

$$d\vec{e}_\theta \parallel \vec{e}_\varphi \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} = cos\theta\vec{e}_\varphi \qquad (4.28)$$

Por esto la derivada de la dirección $\vec{e}_\theta$ con

Graf. 4.7 Cambios de dirección θ si el ángulo φ cambia



respecto al tiempo será:

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = cos\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi - \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r \qquad (4.29)$$

Estamos listos ahora para escribir la aceleración a partir de su definición:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$donde \ \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\left(sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e}_\varphi + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

Agrupando los términos semejantes y observando las reglas de derivación tendremos que:

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - rsin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{e}_r$$

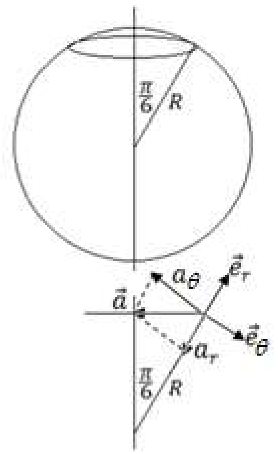
$$+ \left(2sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt} + 2rcos\theta\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt} + rsin\theta\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - rsin\theta cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{e}_\theta \qquad (4.30)$$

Donde aparecen las tres componentes de la aceleración. Aquí también podemos distinguir la aceleración de Coriolis para el caso cuando $\theta = const,\ r = r(t)\ y\ \varphi = \varphi(t)$. En este caso el término $2sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{dt}$ corresponde a la aceleración de Coriolis.

Como ejemplo analicemos el movimiento de una partícula por la superficie de una esfera $r = const$ por una trayectoria circular con un ángulo $\theta = \pi/6 \equiv 30°$.

Graf. 4.8 Ejemplo de C. Esféricas



$$\begin{cases} r = R \\ \varphi = 5t \\ \theta = \pi/6 \end{cases} \quad (4.31)$$

La posición y la velocidad las obtendremos por las reglas de derivación y observando las derivadas de las direcciones (4.25), (4.29):

$$\vec{r} = R\vec{e}_r \qquad \vec{v} = R\frac{d\vec{e}_r}{dt} = R\left(5sin\frac{\pi}{6}\right)\vec{e}_\varphi \quad (4.32)$$

De igual manera derivando la velocidad se obtiene la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{5}{2}R\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{5(5)}{2}R\left(-sin\frac{\pi}{6}\vec{e}_r - cos\frac{\pi}{6}\vec{e}_\theta\right)$$

$$= -\frac{25}{4}R\vec{e}_r - \frac{25\sqrt{3}}{4}R\vec{e}_\theta \qquad (4.33)$$

Entonces la partícula tendrá una aceleración constante con dos componentes perpendiculares. Como se aprecia en el grafico la aceleración estará dirigida al centro de la trayectoria (aceleración centrípeta).

3. CONCLUSIONES.

En esta contribución hemos presentado la forma de describir el movimiento de los cuerpos bajo el modelo de partícula. Para esto hemos visto que podemos describir el movimiento de un cuerpo en varios lenguajes, los que veremos apropiados más adelante conforme las necesidades de los problemas a tratar lo ameriten. Hemos descrito el movimiento usando los sistemas de coordenadas más usados y a la vez destacado su importancia en ejemplos apropiados para cada uno de ellos.

Usando la matemática ya desarrollada se ha podido también describir la medida para los cambios de movimiento y que en la Mecánica Clásica se denomina aceleración. Se describe la aceleración en diferentes sistemas de coordenadas y sus correspondientes ejemplos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] Leithold Louis. El Cálculo. Oxford University Press. Séptima edición. 1998

[2] Física Universitaria V. 1, Sears Zemansky, Editorial Pearson Educación, México 2013