Matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2016, Vol. 14, No. 1

ORIGEN TOPOLÓGICO DE LAS DISTRIBUCIONES

SOLIS SORAYA[1]

Resumen: *Se describe la construcción de una topología sobre un espacio de funciones complejas, la cual es límite inductivo estricta, barrelada, bornológica y Mackey. El dual de dicho espacio, provisto de tal topología, es el espacio de las distribuciones o funciones generalizadas.*
Palabras Claves: Distribución, límite inductivo estricto, barrelado, bornológico, Mackey.

Abstract: *The construction of a topology on a space of complex functions is described, which is strict inductive limit, barreled, bornological and Mackey. This space's dual, provided with such topology, is the space of the distributions or also called generalized functions.*
Keywords: Distribution, Strict inductive limit, barreled, bornological, Mackey.

Recibido: Febrero 2016
Aceptado: Marzo 2016.

1. INTRODUCCIÓN

En el cálculo diferencial con funciones de variable real, se presentan situaciones en las que la derivada de una función continua no necesariamente lo es.

El espacio de distribuciones constituye una clase de funciones que no presenta este inconveniente, entre algunas de sus bondades tenemos que toda distribución es continua y las derivadas parciales de cualquier orden son distribuciones, consecuentemente también son continuas.

En el presente artículo se describe cómo se origina el espacio de distribuciones a partir del espacio $D(\Omega)$ de funciones "test", dotado de una topología especial.

2. DEFINICIONES Y RESULTADOS PRELIMINARES

Def. I.- Espacio vectorial topológico.

Un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ dotado de una topología que hace continuas las operaciones de suma y multiplicación por escalar, se denomina espacio vectorial topológico (t.v.s.).

Proposición I.- En un t.v.s. E son equivalentes: ([3] pag. 6)

i. E es Hausdorff.
ii. Los singleton son cerrados.
iii. Si $x \neq 0$ entonces existe una vecindad de 0 U tal que $x \notin U$.

Proposición II.- En un t.v.s se cumple: ([1] pag. 8, 10)

i. Toda vecindad U de 0 contiene una vecindad simétrica V $(V = -V)$ tal que $V+V \subseteq U$.
ii. Toda vecindad de 0 contiene una vecindad balanceada de 0.
iii. Toda vecindad convexa de 0 contiene una vecindad absolutamente convexa (convexa y balanceada) de 0.

Def. II.- Espacio Localmente Convexo

Un espacio vectorial topológico E sobre un campo $\mathbb{K}$ se dice localmente convexo (l.c.s.), si es Hausdorff y posee una base de 0-vecindades convexas.

Una topología en E que hace continuas las operaciones de suma y multiplicación por escalar y que además posee una base de 0-vecindades convexas se dice localmente convexa.

En algunos resultados se considerarán topologías localmente convexas mientras que en otros se requerirá adicionalmente la condición Hausdorff.

Lema I.- Sea E localmente convexo y H un subespacio vectorial de E. Sea U una vecindad absolutamente convexa en H respecto a la topología inducida por E: ([2] pag. 58)

i. Existe una vecindad absolutamente convexa V en E tal que $V \cap H = U$.
ii. Si $y \notin \bar{H}$, entonces V puede ser escogida tal que $y \notin V$.

Def. III.- Topología Inductiva y Topología Límite Inductiva.

Sean E y $E_\alpha (\alpha \in A)$ espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Sean g_α aplicaciones lineales de E_α en E. Si τ_α es una toplogía sobre el espacio E_α, se define la topología inductiva $\mathcal{I}$ sobre E, respecto a la familia $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha): \alpha \in A\}$, como la topología localmente convexa más fina que hace continuas las aplicaciones $g_\alpha: (E_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (E, \mathcal{I})\, ; \alpha \in A$.

Si $E = gen\{\cup_{\alpha \in A}\ g_\alpha(E_\alpha)\}$, $\mathcal{I}$ se denomina la Topología Límite Inductiva sobre E y denotamos $E = (E, \mathcal{I}) = \underline{ind(E_\alpha, g_\alpha)}$.

Una base de vecindades de 0 de esta topología está dada por la familia U de subconjuntos de E, convexos y balanceados tales que $g_\alpha^{-1}(U)$ es una vecindad de 0 en (E_α, τ_α), para cada $\alpha \in A$.

Notemos que la topología trivial (la que sólo contiene E y ϕ) es una topología localmente convexa que hace continuas todas las aplicaciones g_α, por lo que la colección de tales

[1]*Solis Soraya, Magister en Matemática., Profesora, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, ESPOL. (e_mail: ssolis@espol.edu.ec).*

topologías es no vacía y así $\mathcal{I}$ es el supremo de esta colección.

Def. IV.- Suma Directa Localmente Convexa

Sea $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Sea $E = \bigoplus_\alpha E_\alpha$ la suma algebraica directa, esto es, el subespacio vectorial de $\Pi_\alpha E_\alpha$ formado por los vectores que tienen sus entradas nulas excepto en un número finito de ellas.

Sean (E_α, τ_α) l.c.s. y las aplicaciones lineales $g_\alpha : (E_\alpha, \tau_\alpha) \to E$ la incrustación canónica; $\alpha \in A$.

Al espacio E, dotado de la topología inductiva $\mathcal{I}$ respecto a la familia $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ se lo denomina Suma Directa Localmente Convexa de la familia $\{E_\alpha(\tau_\alpha) : \alpha \in A\}$ y lo denotamos por $(E;\mathcal{I}) = \bigoplus (E_\alpha, \tau_\alpha)$ o simplemente $E = \bigoplus_\alpha E_\alpha$.

Puesto que $\mathcal{I}$ es más fina que la inducida por $\Pi_\alpha E_\alpha$ sobre E, en este caso es Hausdorff y por tanto $(E,\mathcal{I})$ es l.c.s.

Def. V.- Límite Inductivo

Sea $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de l.c.s. sobre un campo $\mathbb{K}$, donde A es un conjunto de índices dirigido bajo una relación "$\leq$". Siempre que $\alpha \leq \beta$ sea $h_{\beta\alpha}$ una aplicación lineal de E_α en E_β. Sea $E = \bigoplus_\alpha E_\alpha$ y sean las aplicaciones lineales $g_\alpha (E_\alpha, \tau_\alpha) \to E$ la incrustación canónica; $\alpha \in A$. Sea H el subespacio generado por las imágenes de las aplicaciones lineales $g_\alpha - g_\beta \mathrm{o} h_{\beta\alpha}$ para todo $\alpha \leq \beta$.

Sabemos que si E es t.v.s., E/H, provisto de la topología cociente, es Hausdorff si y sólo si H es cerrado ([1] pag. 20). En este caso definimos el espacio cociente como el límite inductivo de la familia $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ con respecto a las apliaciones $h_{\beta\alpha}$ y lo denotamos por $\varinjlim h_{\beta\alpha} E_\alpha$.

2.1 LÍMITE INDUCTIVO DE UNA FAMILIA DE SUBESPACIOS

Def. VI.- En la definición anterior consideremos $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ una familia de subespacios de un espacio vectorial E tal que $E = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$, $E_\alpha \neq E_\beta$ si $\alpha \neq \beta$, A es dirigido por inclusión ($\alpha \leq \beta$ ssi $E_\alpha \subseteq E_\beta$), si $\alpha \leq \beta$ entonces $\tau_\alpha \subseteq \tau_\beta$, g_α es la inclusión canónica de E_α en E y $h_{\beta\alpha}$ la inclusión de E_α en E_β, si $\alpha \leq \beta$. Sea E provisto de la topología inductiva $\mathcal{I}$.

En este caso notemos que $g_\alpha - g_\beta$ o $h_{\beta\alpha}$ es nula, para todo $\alpha \leq \beta$, por lo cual H es el subespacio trivial $\{0\}$.

Luego, $E/H = \varinjlim h_{\beta\alpha} E_\alpha$ es homeomorfo a E.

Suponiendo que E/H es Hausdorff, este espacio es el límite inductivo de la familia de subespacios $\{E_\alpha(\tau_\alpha) : \alpha \in A\}$ y es denotado por $E(\mathcal{I})$.

Si adicionalmente τ_β induce τ_α siempre que $\alpha \leq \beta$, diremos que el límite inductivo de la familia de subespacios es estricto.

El límite inductivo estricto de una sucesión creciente de (B)-espacios se denomina (LB)-espacio y el de (F)-espacios (LF)-espacio (B de Banach y F de Fréchet).

Teorema I.- Sea $\{E_n(\tau_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente de l.c.s tal que τ_{n+1} induce τ_n para todo n, E un espacio vectorial dado por $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Entonces la topología inductiva sobre E respecto a las inclusiones canónicas $g_n : E_n \to E$ es Hausdorff e induce τ_n sobre E_n para todo n.

Demostración:

- Primero mostramos que τ_n es menos fina que la topología inducida por $E(\mathcal{I})$ en E_n.

  Fijemos $N \in \mathbb{N}$. Sea V_N una vecindad absolutamente convexa en $E_N(\tau_N)$.

  De la hipótesis τ_{N+k} induce τ_N para todo $k \geq 0$ y por el Lema I es posible construir una sucesión de vecindades absolutamente convexas V_{N+k} en $E_{N+k}(\tau_{N+k}); k \geq 0$, tal que $V_{N+k+1} \cap E_{N+k} = V_{N+k}$. Definamos $V = \bigcup_{k\geq 0} V_{N+k}$. Notemos que V está en E y como estas vecindades están encajadas, V resulta ser absolutamente convexa. Además $g_n^{-1}(V) = V \cap E_n \in \tau_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $V \cap E_N = V_N$. Por tanto V es una vecindad en $E(\mathcal{I})$ que induce la vecindad V_N .
- Ahora mostramos que la topología inducida por $E(\mathcal{I})$ en E_n es menos fina que τ_n.

  Sabemos que la inclusión canónica $g_n : E_n(\tau_n) \to E(\mathcal{I})$ es continua para todo n. Sea U una vecindad de 0 en $E(\mathcal{I})$. Entonces $g_n^{-1}(U) = E_n \cap U \in \tau_n$.
- Finalmente mostramos que $E(\mathcal{I})$ es Hausdorff.

  Por la proposición I es suficiente mostrar que dado $x \neq 0$ existe una vecindad de 0 U en $\mathcal{I}$ tal que $x \notin U$. Como $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ existe algún N tal que $x \in E_N$. Como este subespacio es Hausdorff y su topología coincide con la inducida por $\mathcal{I}$, existe una vecindad de 0 U en $\mathcal{I}$ tal que $x \notin U \cap E_N$ y por tanto $x \notin U$. □

Dada la utilidad de este tipo de construcciones, denotaremos $E(\mathcal{I}) = \varinjlim E_n(\tau_n)$ al límite inductivo estricto de una sucesión de subespacios.

Teorema II.- Sea $E(\mathcal{I}) = \varinjlim E_n(\tau_n)$ y sea E_n cerrado en $E_{n+1}(\tau_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Un

conjunto $B \subseteq E$ es $\mathcal{I}$-acotado si y sólo si existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que B es τ_N −acotado.
Demostración:
$\Leftarrow$ Sea B τ_N −acotado. Sea U una vecindad de 0 en $E(\mathcal{I})$. Por el teorema anterior sabemos que τ_N coincide con la topología inducida por $E(\mathcal{I})$, por tanto existe $t > 0$ tal que $B \subseteq t(U \cap E_N) = tU \cap E_N$. Luego B es $\mathcal{I}$-acotado.

$\Rightarrow$ Supongamos que B es $\mathcal{I}$-acotado pero no es τ_n −acotado para todo $n \in \mathbb{N}$.
Entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ en B tal que $x_n \in E_{k_{n+1}}$ pero $x_n \notin E_{k_n}$.
Luego $n^{-1}x_n \notin E_{k_n}$ Sea V_{k_n} vecindad absolutamente convexa de E_{k_n}. De la hipótesis E_{k_n} es cerrado en $E_{k_{n+1}}$ y por el Lema I existe una vecindad $V_{k_{n+1}}$ de 0 absolutamente convexa en $E_{n_{k+1}}$ tal que $n^{-1}x_n \notin V_{k_{n+1}}$ y $V_{k_{n+1}} \cap E_{k_n} = V_{k_n}$; para todo $n \in \mathbb{N}$. (*)
Definamos $V = \cup_{n=1}^{\infty} V_{k_n}$ y similar a lo realizado anteriormente se tiene que V es una vecindad de 0 en $E(\mathcal{I})$. Como B es acotado en $E(\mathcal{I})$ y $\frac{1}{n} \to 0$ tenemos que $\frac{1}{n}x_n \to 0$ en $E(\mathcal{I})$ por lo cual existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n}x_n \in V$ para todo $n \geq m$.
Pero esto es una contradicción con (*). □

Teorema III.- El límite inductivo estricto de una sucesión de espacios localmente convexos completos es completo.
Sea $\{x_\alpha\}$ una red de Cauchy en el límite inductivo estricto. Luego esta red es acotada en este espacio y por el Teorema anterior existe algún subespacio de la sucesión que la contiene. Como éste es completo la red converge en tal subespacio y por tanto converge en el espacio límite inductivo estricto.

2.2 ESPACIOS BARRELADOS

Def. VII.- Espacio Barrelado

Sea E un espacio vectorial topológico. Un barril (tonel) es un subconjunto de E que es absolutamente convexo y cerrado. E se dice espacio barrelado (tonelado) si todo barril es una vecindad de 0.
Teorema IV.- Todo espacio E localmente convexo de Baire es barrelado.
Demostración: Sea D una barril del espacio E. Puesto que D es absorbente tenemos que $E = \cup_{n=1}^{\infty} nD$ y dado que E es de Baire existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que mD tiene interior no vacío.
Luego existe algún $x \in E$ tal que $x \in int(mD) = m\, int(D)$, por tanto existe $y \in int(D)$ y como D es balanceado su interior también lo es, así $-y \in int(D)$.
Por la convexidad de $int(D)$ se tiene que $0 = \frac{1}{2}y + \left(-\frac{1}{2}\right)y \in int(D)$. □

Corolario I.- Los espacios de Banach y los espacios de Fréchet son barrelados.
Teorema V.- Si $\mathcal{I}$ es la topología inductiva sobre E respecto a una familia de espacios barrelados, con sus correspondientes aplicaciones lineales, entonces todo barril es una vecindad de 0 en $\mathcal{I}$.
Demostración:
Sea $\mathcal{I}$ la topología inductiva sobre E respecto a la familia $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$.
Sea D un barril en $E(\mathcal{I})$. Entonces $g_\alpha^{-1}(D)$ es un barril en $E_\alpha(\tau_\alpha)$. Como este espacio es barrelado se tiene que $g_\alpha^{-1}(D)$ es una vecindad de 0 en $E_\alpha(\tau_\alpha)$; para todo $\alpha \in A$. Luego D es vecindad de 0 en $E(\mathcal{I})$. □

Corolario II.- El espacio cociente Hausdorff de un espacio barrelado también es barrelado, la suma directa localmente convexa y el límite inductivo de una familia de espacios barrelados es barrelado.

2.3 ESPACIOS BORNOLÓGICOS

Def. VIII.- Un espacio localmente convexo E es bornológico si todo conjunto absolutamente convexo que absorbe a todo conjunto acotado de E, es una vecindad de 0.

Teorema VI.- Todo l.c.s metrizable es bornológico.
Demostración:
Sea E un l.c.s metrizable. Entonces E posee una base local numerable ([2] pag. 28). Sin pérdida de generalidad supongamos que esta base está formada por bolas centradas en 0 y radios decrecientes $\{B_n(0, r_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Sea A un conjunto absolutamente convexo que absorbe a todo conjunto acotado de E.
Mostraremos que $B_N \subseteq NA$ para algún $N \in \mathbb{N}$.
Supongamos que $B_N \nsubseteq nA$ para todo n. Existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in B_n$ y $n^{-1}x_n \notin A$.
Como $\{x_n\}$ converge a 0 es acotada y por tanto es absorbida por A lo cual es una contradicción pues $x_n \notin nA$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego A es una vecindad de 0. □

Teorema VII.- Si $\mathcal{I}$ es la topología inductiva sobre E respecto a una familia de espacios bornológicos, con sus correspondientes aplicaciones lineales, entonces todo conjunto de E absolutamente convexo que absorbe todo conjunto acotado en $E(\mathcal{I})$, es una vecindad de 0 en $\mathcal{I}$.
Demostración:
Sea $\mathcal{I}$ la topología inductiva sobre E respecto a la familia $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$.
Sea S un conjunto absolutamente convexo que absorbe todos los conjuntos acotados en $E(\mathcal{I})$.
Entonces $g_\alpha^{-1}(S)$ es un conjunto absolutamente convexo que absorbe todos los conjuntos

acotados en $E_\alpha(\tau_\alpha)$. Como este espacio es bornológico se tiene que $g_\alpha^{-1}(S)$ es una vecindad de 0 en $E_\alpha(\tau_\alpha)$; para todo $\alpha \in A$.

Luego *S* es vecindad de 0 en $E(\mathcal{I})$. □

Corolario III.- El espacio cociente Hausdorff de un espacio bornológico es bornológico, la suma directa localmente convexa y el límite inductivo de una familia de espacios bornológicos es bornológico.

Teorema VIII.- Sea $E(\mathcal{I})$ un espacio bornológico, sea *F* l.c.s. y sea *u* una aplicación lineal de *E* en *F*. Son equivalentes:

(a) *u* es continua.

(b) Si $\{x_n\}$ es una sucesión de *E* que converge a 0, $\{u(x_n)\}$ converge a 0.

(c) Si *B* es acotado en *E*, *u(B)* es acotado en *F*.

Demostración:

(a)→ (b): es inmediato.

(b)→(c): Sea $\{u(x_n)\}$ una sucesión en *u(B)*. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión en *B*. Como *B* es acotado, $\lambda_n x_n$ converge a 0 en *E* para cualquier sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ que converge a 0. De (b) se tiene que $\lambda_n u(x_n)$ converge a 0 y por tanto $u(B)$ es acotado.

(c)→(a): Sea *V* una vecindad absolutamente convexa en *F*. Entonces $u^{-1}(V)$ es absolutamente convexo en *E*. Mostraremos que $u^{-1}(V)$ absorbe todo conjunto acotado de $E(\mathcal{I})$. Sea *B* un conjunto acotado en *E*. De la hipótesis $u(B)$ es acotado en *F* y por tanto existe $t > 0$ tal que $u(B) \subseteq tV$. Luego $B \subseteq tu^{-1}(V)$ y así $u^{-1}(V)$ absorbe todo conjunto acotado de $E(\mathcal{I})$. Como este espacio es bornológico se concluye que $u^{-1}(V)$ es vecindad de 0 en $E(\mathcal{I})$.

2.4 ESPACIOS MACKEY

Def. IX.- Sea X y X' una dualidad y sea $\mathcal{F}$ la familia de los subconjuntos $\sigma(X,X')$- compactos de X'. La topología polar $\tau_{\mathcal{F}}$ sobre X, inducida por los funcionales de Minkowski de $F^0; F \in \mathcal{F}$, se denomina la topología Mackey sobre X denotada por $\tau(X,X')$. Un espacio cuya topología es Mackey se denomina espacio Mackey.

La Topología Mackey verifica que $\sigma(X,X') \subseteq \tau(X,X')$ y consecuentemente es Hausdorff. Adicionalmente, el Teorema de Mackey-Arens establece que si τ es una topología Hausdorff localmente convexa sobre X, τ es compatible con la dualidad entre X y X' si y sólo si $\sigma(X,X') \subseteq \tau \subseteq \tau(X,X')$ ([3] pag. 239). Por tanto se deduce que la topología Mackey es la más fina de todas las topologías Hausdorff localmente convexas que es compatible con la dualidad entre X y X'.

Teorema IX.- Si *E* es l.c.s. barrelado o bornológico, entonces *E* es espacio Mackey. ([2] pag. 132)

Corolario IV.- El límite inductivo de una familia de espacios Mackey es Mackey. ([2] pag. 138)

3. EL ESPACIO D(Ω)

Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y K un subconjunto compacto de Ω.

Sean $D_K = \{f \in C^\infty(\Omega): sop\ f \subseteq K\}$ y $D(\Omega) = \cup D_K$ cuando K recorre todos los compactos de Ω.

Sea $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ un cubrimiento de compactos de Ω, tales que $K_i \subseteq int\ K_{i+1}$ y todo compacto de Ω está contenido en algún K_i.

En este caso D_{K_i} es subespacio vectorial de $D_{K_{i+1}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y además $D(\Omega) = \cup_{i\in\mathbb{N}} D_{K_i}$, es un espacio vectorial.

Definamos sobre $C^\infty(\Omega)$ la familia de seminormas $\{p_i: i \in \mathbb{N}\}$ dada por:

$p_i(f) = \max\{|D^\alpha f(x)|: x \in K_i; |\alpha| \le i\}$, donde $D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial_x{}^{\alpha_n} \dots \partial_{x_1}{}^{\alpha_1}}; |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Estas seminormas inducen una topología localmente convexa en $C^\infty(\Omega)$ que además es metrizable por poseer una base local numerable. Por la forma de la métrica *d* definida en $C^\infty(\Omega)$ como $d(f,g) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{2^{-i} p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)}$, tenemos que $C^\infty(\Omega)$ es espacio de Fréchet y cada D_K es subespacio cerrado de $C^\infty(\Omega)$, para todo compacto *K* de Ω, por tanto cada D_K también es Fréchet. ([1] pag. 31).

Denotemos por τ_K la topología heredada de $C^\infty(\Omega)$ en cada D_K. Por la forma del cubrimiento $\cup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ y de la definición de p_i, se verifica que $\tau_{K_{i+1}}$ induce τ_{K_i}.

Por otra parte, definamos sobre $D(\Omega)$ una base local β formada por la colección de todos los conjuntos convexos y equilibrados W tales que $D_k \cap W \in \tau_K$, para todo compacto *K* de Ω. Esta colección dota de una topología τ a $D(\Omega)$ que lo convierte en un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo ([1] pag. 142).

A continuación mostramos que $D(\Omega) = (D(\Omega),\tau)$ posee las siguientes propiedades topológicas.

(a) τ es una Topología Límite Inductiva sobre $D(\Omega)$.

(b) τ es Hausdorff e induce las topologías τ_K.

(c) $D(\Omega)$, dotado de la topología τ, es espacio límite inductivo estricto de la sucesión de subespacios $\{D_{K_i}(\tau_{K_i}): i \in \mathbb{N}\}$.

(d) Para todo conjunto B $\tau-$acotado existe algún D_K que lo contiene.

(e) $D(\Omega)$ dotado de la topología τ es completo.

(f) $D(\Omega)$ dotado de la topología τ es barrelado.
(g) $D(\Omega)$ dotado de la topología τ es bornológico.
(h) $D(\Omega)$ dotado de la topología τ es Mackey.

(a) τ es una Topología Límite Inductiva sobre $D(\Omega)$.

En esta parte empleamos la Definición III.
Por la construcción de $D(\Omega)$ y de β, τ satisface la definición de Topología Límite Inductiva respecto a la familia $\{D_{K_i}, \tau_{K_i}, g_i : i \in \mathbb{N}\}$ considerando $g_i : D_{K_i} \to D(\Omega)$ las inclusiones canónicas.
Tenemos que $D(\Omega) = gen\{\cup_{i\in\mathbb{N}} g_i(D_{K_i})\} = \cup_{i\in\mathbb{N}} D_{K_i}$ y todo W satisface $g_i^{-1}(W) = D_{K_i} \cap W \in \tau_{K_i}; i \in \mathbb{N}$.
Esto prueba que β es una base de vecindades de 0 para la Topología Límite Inductivo τ.

(b) τ es Hausdorff e induce las topologías τ_K.

Para esta parte empleamos el Teorema I.
Lo expuesto en (a) sumado al hecho que $\tau_{K_{i+1}}$ induce τ_{k_i}; $i \in \mathbb{N}$, satisfacen las hipótesis de este Teorema y por tanto τ posee las propiedades mencionadas.

(c) $D(\Omega)$, dotado de la topología τ, es espacio límite inductivo estricto de la sucesión de subespacios $\{D_{K_i}(\tau_{K_i}) : i \in \mathbb{N}\}$.

En esta parte aplicamos la Definición VI.
En nuestro caso particular, $D(\Omega) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_{K_i}, \tau_{K_{i+1}}$ induce $\tau_{K_i}: i \in \mathbb{N}$ y los D_K están ordenados por inclusión. Además, de la parte (b) $(D(\Omega), \tau)$ es Hausdorff y por tanto los singleton son cerrados.
Luego, $D(\Omega)$ cocientado por $\{0\}$ es Hausdorff y así $(D(\Omega), \tau)$ satisface la definición de espacio Límite Inductivo Estricto.

(d) Para todo conjunto B τ -acotado existe algún D_K que lo contiene.

En esta parte empleamos el Teorema II.
Por lo mostrado en c), $(D(\Omega), \tau)$ es límite inductivo estricto y dado que todos los D_K son cerrados en $C^\infty(\Omega)$ y $D_{k_i} \subseteq D_{K_{i+1}}$, se tiene que D_{k_i} es cerrado relativo en $D_{k_{i+1}}$.
Por tanto $(D(\Omega), \tau)$ verifica las hipótesis del Teorema lo cual nos garantiza la propiedad mencionada. Una consecuencia inmediata de esta propiedad es que este espacio tiene la propiedad de Heine-Borel.

(e) $D(\Omega)$, dotado de la topología τ, es completo.

En esta parte empleamos el Teorema III.
Como cada D_{k_i} es completo, $(D(\Omega), \tau)$ verifica las hipótesis del teorema lo cual nos garantiza la propiedad mencionada.

(f) $D(\Omega)$, dotado de la topología τ, es barrelado.

En esta parte empleamos los Corolarios I y II.
Puesto que cada D_{K_i} es espacio de Fréchet, del Corolario I se concluye que son barrelados y por Corolario II su límite inductivo lo es.

(g) $D(\Omega)$, dotado de la topología τ , es bornológico.

Esta propiedad se verifica por el Teorema VI y el Corolario III.
Por el Teorema VI cada D_{K_i} es bornológico y del corolario III el límite inductivo también es bornológico.
Dado este resultado y del Teorema VIII, una propiedad importante que vale la pena destacar, es que el estudio de la continuidad en el espacio de distribuciones se puede hacer a través de sucesiones o conjuntos acotados.

(h) $D(\Omega)$, dotado de la topología τ, es Mackey.

Por lo mostrado en f) o en g), del Teorema IX se concluye que cada D_{K_i} es Mackey y del corolario IV el límite inductivo $(D(\Omega), \tau)$ es Mackey.

4. EL ESPACIO DE LAS DISTRIBUCIONES

Al espacio dual de $D(\Omega)$, provisto de la topología τ, se lo conoce como el espacio de distribuciones y es denotado por $D'(\Omega) = (D(\Omega), \tau)'$.

5. CONCLUSIONES

1. Por la construcción particular de $D(\Omega)$, resulta que la topología límite inductiva definida sobre este espacio es Hausdorff, completa, barrelada, bornológica y Mackey.
2. Se define el espacio de las distribuciones o de las "funciones generalizadas", como el dual topológico de $D(\Omega)$, el cual con las características antes mencionadas, se aplica en el Análisis, la Física y otras ramas de la ingeniería.
3. Toda la teoría del Análisis que sustenta la construcción del espacio de las distribuciones, puede ser utilizada para el estudio de este espacio, así como para la construcción de otros espacios con determinadas características.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]. W. Rudin; Análisis Funcional; Editorial Reverté S.A.; España 2002.

[2]. H. H. Schaefer; Espacios Vectoriales Topológicos; Springer-Verlag; New York 1980.

[3]. C. Swartz; Functional Analysis Introduction; Marcel Dekker, Inc; USA 1992.