

MODELO NUMÉRICO DE ELEMENTOS FINITOS PARA LA SIMULACIÓN DE CONDUCCIÓN DE CALOR EN PLACAS PERFORADAS DE METAL Y MATERIALES COMPUESTOS TIPO CARBONO-CARBONO

Angulo Wilfredo¹, Eligio Colmenares², Edemir Suárez³.

Resumen. En este trabajo se presenta un modelo numérico basado en el método de los elementos finitos (FEM) para la simulación de la conducción de calor en placas perforadas de metal y de material compuesto de fibras de carbono. Para esto, se propone un modelo matemático que consistió en un problema de frontera tipo Robin para el operador de Helmholtz y se demuestra que está bien planteado en el sentido de distribuciones. El modelo numérico se obtuvo por medio del problema variacional equivalente y su discretización usando el elemento finito de Courant para un tamaño h de la malla de elementos finitos. La aproximación numérica fue del orden h respecto a la norma H^1 y de orden h^2 respecto a la norma L^2 . Se realizaron simulaciones numéricas mediante un código numérico en MATLAB y acá, se visualizaron los perfiles de temperaturas de algunos problemas de prueba en los que se supone una perforación regular en placas de metal y materiales de fibras de carbono.

Palabras claves: modelo numérico, elementos finitos, problemas de frontera, conducción de calor, placas perforadas.

NUMERICAL MODEL BASED ON FINITE ELEMENT METHOD FOR THE SIMULATION OF HEAT CONDUCTION IN PERFORATED PLATES OF METAL AND MATERIAL COMPOSED OF CARBON FIBERS.

Abstract. In this work is presented a numerical model based on finite element method (FEM) for the simulation of heat conduction in perforated plates of metal and material composed of carbon fibers. For this, a mathematical model based on a type Robin boundary problem for the Helmholtz operator is proposed for demonstrating that it is a well-posed problem in the distributions sense. The numerical model was obtained through the equivalent variational problem and its discretization using the Courant finite element for a finite element mesh of size h . The numerical approach was of order h with respect to H^1 norm and order h^2 with respect to norm L^2 . Numerical simulations through a designed and implemented code in Matlab were done and thus, the profiles of temperatures were visualized for some test problems assuming a regular perforation in metal plates and carbon fiber materials.

Key Words: numerical model, finite element, boundary problem, heat conduction, perforated plates.

Recibido: Septiembre 2016

Aceptado: Septiembre 2016

INTRODUCCIÓN

Los métodos no destructivos para la detección de daños en placas de metal o materiales compuestos de fibras de carbono que se producen a nivel industrial, juegan un rol fundamental. Entre estos se encuentran los termográficos, que se distinguen por detectar el daño del material como su acción resistente a la conducción de calor manifestada mediante la alteración del campo de temperatura de enfriamiento. Con el fin de aumentar el conocimiento del fenómeno físico de la transferencia de calor en algunos daños más específicos, se han llevado a cabo estudios usando modelado matemático y simulación numérica-computacional.

Dutton (1996) utilizó diferencias finitas para aproximar la ecuación de difusión de calor y estudiar los efectos producidos por bolsa de aires o cuerpos extraños en la conductividad y difusividad térmica de una placa de material compuesto de vidrio y poliéster. Por otro lado Gil *et al* (2004) y Chaves *et al* (2005) han propuesto un modelo de conducción de calor para detectar fallas en placas de metal. En ambos trabajos se empleó un programa comercial de elementos finitos para simular la detección termográfica de las fallas, pero en ninguno de los casos se realizó y analizó la discretización de elementos finitos; aún más, las condiciones impuestas sobre las fronteras de la placa metálica, considerando la falla, no están claramente especificadas. Estos aspectos del modelaje son fundamentales en la simulación computacional, pues es necesario tener control sobre la regularidad de la data y el dominio de validez asociado al modelo de conducción de calor para el buen planteamiento del problema. Por otro lado, las estimaciones de cotas para el error en las normas adecuadas permiten el control de la aproximación (Axelson y Barker, 1984) y en los trabajos citados anteriormente, un estudio en tal sentido no fue realizado.

¹Departamento de Matemáticas y Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas a Ciencia e Ingeniería (CIMACI), Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil-Ecuador, e-mail: wangulo@espol.edu.ec,

²Centro de Investigación en Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción -Concepción-Chile, e-mail: eligio@ci2ma.udec.cl

³Departamento de Ingeniería Agrícola, Decanato de Agronomía, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", Tarabana-Venezuela, e-mail:edemirsuarez@ucla.edu.ve

Por todo lo anterior, en este trabajo se realiza un estudio de discretización de elementos finitos (FEM) para la ecuación de conducción de calor, con condiciones de frontera adecuadas, para simular la detección de perforaciones regulares en placas de metal y material compuesto de fibras de carbono. Para el entendimiento, este trabajo se ha organizado por secciones de la manera siguiente: En la primera sección se presenta el modelo matemático completo basado en la ecuación de calor en un dominio perforado y acoplada con condiciones de frontera tipo Robin. Una semi-discretización temporal del modelo lo transforma en un problema para el operador de Helmholtz en un paso de tiempo. En la segunda sección se presenta la formulación variacional equivalente del problema de Helmholtz y se demuestra que es un problema bien planteado en el sentido de distribuciones. La aproximación de este problema variacional se lleva a cabo en la tercera sección usando la técnica de Galerkin. Posteriormente se usa el elemento finito del tipo Courant (interpolación \mathbb{P}_1 a trozos) para especificar la discretización y obtener las cotas para el error respecto al tamaño h de discretización en una malla de elementos finitos triangulares. Finalmente en la sección cuatro se presentan algunos ensayos numéricos y en la sección cinco se emiten las conclusiones correspondientes.

MODELO MATEMÁTICO COMPLETO

Se considera un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera Lipschitz $\partial\Omega$, en el cual está inmerso un subdominio regular denotado por B tal como se ilustran en la figura siguiente:

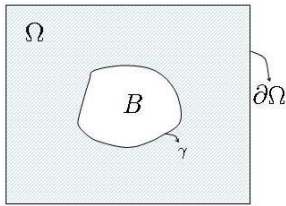


Figura 1. Dominio Ω con perforación B

La placa de metal y el material compuesto con el daño se abstraen como el dominio perforado $\Omega \setminus \bar{B}$ de frontera $\partial\Omega \cup \gamma$, en donde γ denota la frontera interna. La conductividad térmica k para la placa de metal se considera constante en todas las direcciones del espacio, pero en el caso del material compuesto de fibra de carbono-carbono esta propiedad no tiene por que ser así. Por tal razón, se considera que en general la

conductividad térmica viene dada por el siguiente tensor:

$$\bar{\bar{K}} = \begin{pmatrix} k_{x_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_{x_2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

en donde k_{x_1} y k_{x_2} son respectivamente las conductividades térmicas dadas en las direcciones x_1 y x_2 respectivamente.

Sea $[0, T] \subset \mathbb{R}$ el intervalo de tiempo. El campo de temperatura se denota por $u = u(\vec{x}, t)$ para todo $(\vec{x}, t) \in \Omega \setminus \bar{B} \times [0, T]$, y se considera que $t_0 = 0$ es el instante en el que se da inicio al enfriamiento de la placa (luego de que se ha irradiado en un tiempo considerable con una fuente de energía térmica) y para el cual se supone conocida la temperatura inicial: $u(\vec{x}, 0) = u^0(\vec{x})$ para cualquier $\vec{x} \in \Omega \setminus \bar{B}$. Entonces, para cada tiempo $t \in (0, T]$ la ecuación de calor homogénea (sin fuente) viene dada por:

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(\bar{\bar{K}} \text{grad}(u)) = 0 \text{ en } \Omega \setminus \bar{B} \quad (2)$$

en donde ρ y C_p son, respectivamente la densidad y capacidad calorífica del material, y

$$-\text{div}(\bar{\bar{K}} \text{grad}(u)) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

Experimentalmente se ha considerado que el enfriamiento de las placas se da por convección libre, mediante el gradiente generado por la temperatura inicial de la placa y la temperatura del ambiente (u_{amb}). Por esta razón, las condiciones de sobre la frontera $\partial\Omega \cup \gamma$ se establecen mediante un balance de energía térmica, en donde se igualan los flujos de calor por convección y conducción tanto en $\partial\Omega$ como en γ usando la ley de enfriamiento de Fourier para la conducción (ver Incropera y DeWitt, 1990). En este orden de ideas, si $h_{\partial\Omega}$ y h_γ denotan respectivamente los coeficientes de convección dados constantes sobre cada componente de la frontera, entonces para todo la frontera $\partial\Omega \cup \gamma$ se introduce el siguiente coeficiente de convección

$$h_c = \chi_{\partial\Omega} h_{\partial\Omega} + \chi_\gamma h_\gamma, \quad (4)$$

en donde $\chi_{\partial\Omega}$ y χ_γ , son las funciones características de las superficies $\partial\Omega$ y γ

respectivamente. Con todo lo anterior, sobre $\partial\Omega \cup \gamma$ se impone la siguiente condición

$$h_c u + \bar{K} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = h_c u_{amb} \text{ sobre } \partial\Omega \cup \gamma \times (0, T), \quad (5)$$

en donde

$$\bar{K} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \sum_{i=1}^2 k_{x_i} n_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (6)$$

siendo n_i la i -ésima componente del vector unitario \bar{n} normal a $\partial\Omega \cup \gamma$. El modelo matemático completo es entonces el siguiente: Dados $\rho, C_p, h_{\partial\Omega}, h_\gamma$, constantes positivas y $\bar{K} \in \mathbb{R}_+^{2 \times 2}$, encontrar la función $u: \Omega \setminus \bar{B} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\begin{cases} \rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\bar{K} \operatorname{grad}(u)) = 0 & \text{en } \Omega \setminus \bar{B} \times (0, T], \\ h_c u + \bar{K} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = h_c u_{amb} & \text{sobre } \partial\Omega \cup \gamma \times (0, T), \\ u(\vec{x}, 0) = u^0(\vec{x}) & \text{en } \Omega \setminus \bar{B}. \end{cases} \quad (7)$$

SEMI-DISCRETIZACIÓN

Se propone una aproximación en diferencias finitas a primer orden para el operador $\partial/\partial t$ basada en el método implícito de Euler tipo *backward-time* (ver Quarteroni *et al* 2000). Entonces, para un paso de discretización $\delta t > 0$ fijo y para cada $n = 0, 1, \dots, N_{\delta t}$, se discretiza el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + T]$ mediante una sucesión de nodos $t_n = t_0 + n\delta t$. Aquí, $N_{\delta t}$ es el máximo entero tal que $t_{N_{\delta t}} \leq t_0 + T$. Ahora, si se denota por $u^j(\vec{x})$, para toda $\vec{x} \in \Omega \setminus \bar{B}$, a la aproximación en el nodo t_j de la solución exacta $u(\vec{x}, t_j)$, entonces el problema (7) se transforma, para el nodo t_{n+1} y el nuevo parámetro $\alpha = 1/\delta t$, en el siguiente problema de frontera: Dada $u^0(\vec{x}), \forall \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{B}$, encontrar, para cada $n \geq 0$, la función $u^{n+1}: \Omega \setminus \bar{B} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que

$$\begin{cases} \alpha \rho C_p u^{n+1} - \operatorname{div}(\bar{K} \operatorname{grad}(u^{n+1})) = \alpha \rho C_p u^n & \text{en } \Omega \setminus \bar{B}, \\ h_c u^{n+1} + \bar{K} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial \bar{n}} = h_c u_{amb} & \text{sobre } \partial\Omega \cup \gamma. \end{cases} \quad (8)$$

El problema anterior, es un problema de frontera mixto del tipo elíptico definido para el operador de Helmholtz generalizado a parámetro $\alpha \rho C_p$,

$$\mathcal{H}_{\alpha \rho C_p} = \alpha \rho C_p (\cdot) - \operatorname{div}(\bar{K} \operatorname{grad}(\cdot)), \quad (9)$$

Aplicado a la función $u^{n+1}, n \geq 0$, en $\Omega \setminus \bar{B}$.

FORMULACIÓN VARIACIONAL Y BUEN PLANTEAMIENTO

Para establecer una formulación variacional y su buen planteamiento (sin perder el sentido del problema estudiado) se suprimen los superíndices correspondientes a la semi-discretización temporal y se enmarca el problema (8) en la siguiente estructura elíptica más general: Dadas las constantes positivas: α, ρ, C_p , la matriz $\bar{K}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, una función f definida en $\Omega \setminus \bar{B}$, funciones h_c y g definidas sobre $\partial\Omega \cup \gamma$, encontrar $u: \Omega \setminus \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$ solución de:

$$\begin{cases} \alpha \rho C_p u + \mathcal{A}u = \alpha \rho C_p f & \text{en } \Omega \setminus \bar{B}, \\ h_c u + \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_{\bar{K}}} = g & \text{sobre } \partial\Omega \cup \gamma, \end{cases} \quad (10)$$

En donde

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\operatorname{div}(\bar{K}(\vec{x}) \operatorname{grad}(\cdot)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{x_i}(\vec{x}) \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Y

$$\frac{\partial (\cdot)}{\partial \bar{n}_{\bar{K}}} = \sum_{i=1}^2 k_{x_i}(\vec{x}) n_i \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_i}$$

Las siguientes hipótesis de regularidad sobre la data del problema también se hacen:

- **H1** : Para cualesquiera β_1 y β_2 reales, tales que $0 < \beta_1 < \beta_2$, $\bar{K}(\vec{x})$ pertenece al espacio de matrices 2×2 siguiente:

- $M(\beta_1, \beta_2, \Omega \setminus \bar{B}) =$
- $\left\{ \bar{K}(\vec{x}) \in [L^\infty(\Omega \setminus \bar{B})]^{2 \times 2}; (\bar{K}(\vec{x}) \vec{\xi}, \vec{\xi}) \geq \beta_1 \|\vec{\xi}\|_2^2, \right.$
- $\left. \|\bar{K}(\vec{x}) \vec{\xi}\|_2 \leq \beta_2 \|\vec{\xi}\|_2, \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 \text{ y en c.t.p sobre } \Omega \setminus \bar{B} \right\}$

- **H2**: La función f es un elemento del espacio $L^2(\Omega \setminus \bar{B})$, h_c es una función positiva y acotada superiormente sobre $\partial\Omega \cup \gamma$: $0 < \sigma_0 \leq h_c(\vec{x}) \leq \sigma_1$ y la función g es un elemento del espacio de distribuciones $H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)$.

Los siguientes resultados establecen una formulación variacional equivalente del problema

10 y su buen planteamiento (ver pruebas en Angulo y Colmenares 2007).

Proposición 1 (Formulación variacional equivalente). *Sea $\Omega \setminus \bar{B}$ el dominio perforado dado anteriormente con frontera $\partial\Omega \cup \gamma$ continua Lipschitz. Suponga que las hipótesis de regularidad **H1** y **H2** sobre la data del problema (10) se satisfacen. Entonces, una formulación débil equivalente al problema (10) viene dada por: Encontrar $u \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ tal que*

$$a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B}), \quad (10)$$

en donde $a: H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \times H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal dada por

$$\begin{aligned} a(u, v) = & \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \alpha \rho C_p u v \\ & + \int_{\Omega \setminus \bar{B}} \bar{K} \nabla u \cdot \nabla v \\ & + \int_{\partial\Omega \cup \gamma} h_c u v \end{aligned} \quad (11)$$

y $\ell: H^1(\Omega \setminus \bar{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ es el funcional lineal definido por

$$\ell(v) = \int_{\partial\Omega \cup \gamma} \alpha \rho C_p f v + \langle g, v \rangle. \quad (12)$$

Proposición 2 (Existencia, unicidad y estabilidad de la solución débil). *Para la formulación débil dada en la Proposición 1, existe una única solución $u \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$. Además, existe una constante $C_{\Omega \setminus \bar{B}} = C(\Omega \setminus \bar{B})$ tal que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} \leq C_{\Omega \setminus \bar{B}} \left(\|f\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega \cup \gamma)} \right). \quad (13)$$

APROXIMACIÓN TIPO GALERKIN Y DISCRETIZACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

La aproximación mediante la técnica de Galerkin es el primer paso para realizar la discretización de elementos finitos del problema variacional (10). La idea es buscar una solución u_h en un nuevo espacio X_h , en donde $h > 0$ es un el parámetro de discretización destinado a tender a cero y, en el sentido de los elementos finitos, representará el tamaño de la malla. El espacio X_h es de dimensión finita y en este trabajo se considera como un subespacio de $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ con el propósito de que

la aproximación por el MEF sea conforme. Con esto, el problema variacional aproximado es el siguiente: Encontrar $u_h \in X_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in X_h. \quad (14)$$

Si se denota por $N(h)$ la dimensión del espacio X_h , entonces se toma de $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ un conjunto de funciones $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N(h)}$ para definir una base de X_h y la aproximación de Galerkin u_h se expresa como una combinación lineal de estas funciones para transformar el problema (14) en el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(h)} u_j a(\varphi_j, \varphi_i) &= \ell(\varphi_i), \quad 1 \leq i \\ &\leq N(h), \end{aligned} \quad (15)$$

en donde, por ser arbitraria, v_h se ha tomada idénticamente igual a las funciones de base y u_j es el valor de las componentes de la función u_h en la base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N(h)}$. De manera equivalente, el sistema de ecuaciones anterior se puede describir en forma matricial como: Dada $\bar{A} \in \mathbb{R}^{N(h) \times N(h)}$ y $\bar{b} \in \mathbb{R}^{N(h) \times 1}$ encontrar $\bar{u} \in \mathbb{R}^{N(h) \times 1}$ solución de

$$\bar{A}\bar{u} = \bar{b}, \quad (16)$$

donde los coeficientes de la matriz \bar{A} y el vector \bar{b} vienen dados, respectivamente, por: $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ y $b_i = \ell(\varphi_i)$.

Gracias a que la aproximación es conforme, entonces el buen planteamiento de la formulación variacional que se estableció en la sección anterior garantiza que el sistema (16) tiene una única solución. Se verifica fácilmente que la matriz \bar{A} es definida positivo gracias a que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica y elíptica (ver Girault y Raviart 1979). Además una propiedad de ortogonalidad se establece con esta forma bilineal, a partir de la cual se puede afirmar que la aproximación de Galerkin u_h es precisamente la proyección ortogonal de la solución u sobre el espacio X_h con producto interno de este espacio la misma forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$. Con esto, el Lema de Cea (ver enunciado en Girault y Raviart 1979) proporciona una cota para el error de aproximación $(u - u_h)$ en la norma de $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$. El problema con esta primera estimación es que no se precisa muy bien la cota, pues no se cuenta con la definición adecuada del operador de proyección que define a la aproximación de Galerkin. Este operador se puede definir como un operador de interpolación Π_h de $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ en X_h y entonces el análisis del error $(u - u_h)$ se reduce a estudiar el error de

interpolación $(u - \Pi_h u)$. Dado que la construcción de tal operador depende del espacio X_h , entonces se utiliza el FEM como alternativa sistemática para la construcción del espacio, en primer lugar, y automáticamente se tendrá una forma de precisar la estructura del operador Π_h ; en efecto este se define como la aplicación del interpolador local (dado por la definición del elemento finito usado) a toda función v del espacio $H^1(\Omega \setminus \bar{B})$ restringida a un elemento cualquiera del conjunto que define la malla de elementos finitos.

DISCRETIZACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

Sea \mathcal{T}_h una triangulación o malla para el dominio perforado $\Omega \setminus \bar{B}$, la cual consiste de un conjunto de triángulos $\{T_i\}_{i=1}^n$ que verifican lo siguiente:

- $T_i \subset \overline{\Omega \setminus \bar{B}}$ y $\overline{\Omega \setminus \bar{B}} = \bigcup_{i=1}^n T_i$;
- $T_i \cap T_j$ es vacío, algún vértice común a T_i y T_j o algún lado E común a estos triángulos.

Los nodos de la malla se corresponden con los vértices de los triángulos. Se denota por: N_s al número de nodos totales en toda la malla, N_f al número de nodos situados sobre $\partial\Omega \cup \gamma$, $N_i = N_s - N_f$ al número de nodos internos y por N_e el número de triángulos en la malla. Aquí $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ es el tamaño de la malla, con h_T la longitud del lado más largo de un triángulo $T \in \mathcal{T}_h$. Asociando a cada $T \in \mathcal{T}_h$ el elemento finito de Courant (ver definición en Axelsson y Barker 1984), el espacio X_h se define como

$$X_h = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\Omega \setminus \bar{B}); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_1\} \subset H^1(\Omega \setminus \bar{B}). \quad (17)$$

Con esto, se tiene que cada φ_i del conjunto de funciones $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N(h)}$ es un elemento de X_h y además que $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_s}$ forma una base de X_h . Por lo tanto, el ensamblaje del sistema lineal de ecuaciones (16) que proporciona la aproximación de Galerkin se puede llevar a cabo mediante un algoritmo cuyo costo computacional es proporcional al número de elementos finitos N_e de la malla, y está basado en la forma de los elementos de la matriz y del vector lado derecho del sistema como suma de integrales sobre los elementos $T \in \mathcal{T}_h$. La descripción de un tal algoritmo es la siguiente: Se supone que la descripción de la malla, por cada elemento T , implica una lista de nodos. Por lo tanto, se utiliza un bucle principal sobre los elementos. Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, los únicos coeficientes de la matriz \bar{A} que

recibirán una contribución no nula del elemento son aquellos donde uno de los nodos pertenezca a tal elemento. Como hay 3 vértices en cada triángulo $T \in \mathcal{T}_h$ (sin incluir, por ahora, los de las fronteras), cada elemento contribuye con 9 coeficientes de la matriz y por tal razón el ensamblaje tiene un costo proporcional al número de elementos. Este cálculo se puede precisar de la manera siguiente: Dada una tabla de tamaño $(N_e, 3)$, se denota por NumNod al número de nodos en la malla de manera tal que NumNod(e, l) designa al l^e -ésimo nodo del elemento T_e . En consecuencia, sobre todo elemento T_e , la función de base local $\varphi_{i, T_e} = \lambda_e$ (con λ_e es la coordenada baricéntrica del triángulo) es la restricción a T_e de la base $\varphi_{\text{NumNod}(e, l)}$ asociada al nodo NumNod(e, l).

ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

Para demostrar la convergencia del algoritmo basado en el FEM, en primer lugar se precisa la construcción del operador de interpolación Π_h y algunas desigualdades fundamentales. Gracias al interpolador local $\Pi_T: \mathcal{C}^0(T) \rightarrow \mathbb{P}_1$, definido por el elemento de Courant, la construcción según fue señalado anteriormente viene dada por: Para toda función $v \in H^1(\Omega \setminus \bar{B})$

$$\Pi_h(v)|_T = \Pi_T(v|_T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (18)$$

El siguiente resultado proporciona dos desigualdades relativas al operador local de interpolación (véase prueba en Colmenares E. 2008).

Proposición 3. Para cualquier $\mathcal{C}^2(T)$, las siguientes desigualdades se tienen

$$\forall \bar{x} \in T, |(v - \Pi_T)(\bar{x})| \leq \frac{h_T^2}{2} \|\partial^2 v\|_{L^\infty(T)}, \quad (19)$$

$$\forall \bar{x} \in T, |(v - \Pi_T)(\bar{x})| \leq \frac{h_T^2}{2q_T} \|\partial^2 v\|_{L^\infty(T)}.$$

q_T es el diámetro del círculo inscrito en T . Esta Proposición se usó para encontrar las estimaciones de cota para el error global en la aproximación de Galerkin vía FEM; este es el objetivo del siguiente resultado (para las pruebas véase en Colmenares 2008).

Proposición 4. Sea \mathcal{T}_h la triangulación asociada a la discretización de elementos finitos para el dominio $\Omega \setminus \bar{B}$ tal que h tiende a cero y existe una constante $\zeta > 0$ tal que para todo $h > 0$ y todo $T \in \mathcal{T}_h$ se tenga que $(h_T/q_T) \leq \zeta$. Suponiendo

que la solución exacta es de clase $C^2(\Omega \setminus \bar{B})$, entonces el MEF converge y se tienen las siguientes estimaciones para el error:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega \setminus \bar{B})} &\leq C_0 h^2 \|\partial^2 u\|_{L^\infty(\Omega \setminus \bar{B})}, \quad (20) \\ \|u - u_h\|_{H^1(\Omega \setminus \bar{B})} &\leq C_1 h \|\partial^2 u\|_{L^\infty(\Omega \setminus \bar{B})}. \end{aligned}$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan algunas simulaciones numéricas correspondientes al flujo de calor en placas metálicas y compuestas de fibra de carbono bajo las siguientes consideraciones: Cada placa es el cuadrado $\bar{\Omega} = [-1,1] \times [-1,1]$ y la perforación (que simula el daño) es la bola $\bar{B} = \mathcal{B}(\bar{0}; \varepsilon) = \{\vec{x} \in \Omega; \|\vec{x}\|_2 \leq \varepsilon\}$. En este caso particular se tomo $\varepsilon = 0.2$. La figura siguiente ilustra una malla de elementos finitos \mathcal{T}_h generada con las especificaciones anteriores.

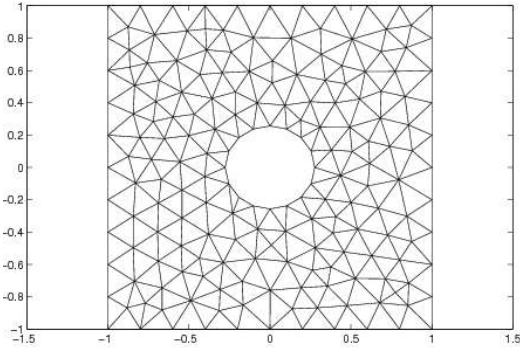


Figura 2. Malla \mathcal{T}_h sobre el dominio $\Omega \setminus \bar{B}$

La función g y todas sus restricciones se corresponde con la temperatura ambiente circunvecina a las componentes de la frontera, $\partial\Omega$ y γ , multiplicada por el coeficiente de convección h_c . La función f se toma compatible con la regularidad pedida en el problema variacional. Aún más, dado que f es $\alpha\rho C_p$ -veces la temperatura inicial de la placa, entonces su regularidad es la misma que la de esta función de temperatura inicial. En este trabajo se propone la siguiente función de temperatura inicial consistente con la regularidad y el fenómeno de transferencia de calor

$$u^0(\vec{x}) = u_{amb} + \eta \|\vec{x}\|_2^2 \exp(-\|\vec{x}\|_2^2), \quad \forall \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{B}, \quad (21)$$

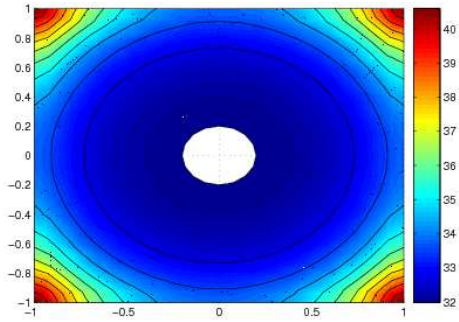
en donde $\eta = 0.926$ es un factor de ajuste geométrico fijo para el dominio usado en esta

simulación. También para esta simulación se consideró en todos los casos: $u_{amb} = 31.85^\circ\text{C}$ y que el tiempo inicial de arranque se corresponde a la placa enfriándose luego de ser calentada por las cuatro esquinas a una $u^0(\vec{x}) > u_{amb}$, $\forall \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{B}$.

RESULTADOS PARA LA PLACA METÁLICA

La placa es de una aleación de aluminio con: $\rho = 2789 \text{ Kg/m}^3$, $C_p = 917.35 \text{ J/(Kg} \cdot ^\circ\text{C)}$, $k = 192.15 \text{ J/(s} \cdot \text{m} \cdot ^\circ\text{C)}$ y $h_c = 10 \text{ J/(s} \cdot \text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$. En las Figuras 3 y 4 se muestran las isosuperficies e isolíneas correspondientes al campo de temperatura y al perfil de este en los tiempos de simulación $t_1 = 35\text{s}$ y $t_{15} = 525\text{s}$.

Las simulaciones ilustradas en las figuras anteriores se observa como las cuatro esquinas de la placa se encuentran a una temperatura más alta que la temperatura ambiente, además que este campo de temperatura disminuye hacia la perforación. Esto se observa con la isolíneas del campo de temperatura proyectado en el plano. Se nota como las isolíneas, en el tiempo t_{15} , se deforman de manera consistente con el flujo de calor en la placa y según el fenómeno de conducción. Aún más, en estos experimentos numéricos el perfil de temperatura deja en evidencia que el flujo de calor es igual en las direcciones x_1 y x_2 , tal como se esperaría en la realidad para el caso de placas metálicas.



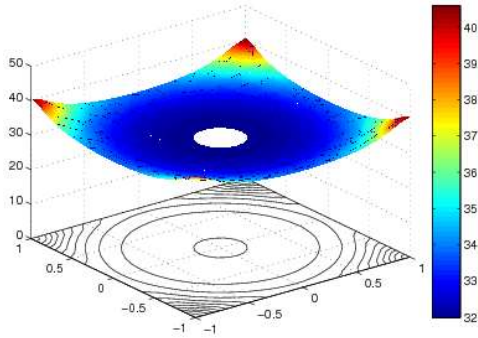


Figura 3. Isosuperficies en 2D y 3D e isolíneas para el campo de temperatura en la placa de aluminio para $t_1 = 35s$

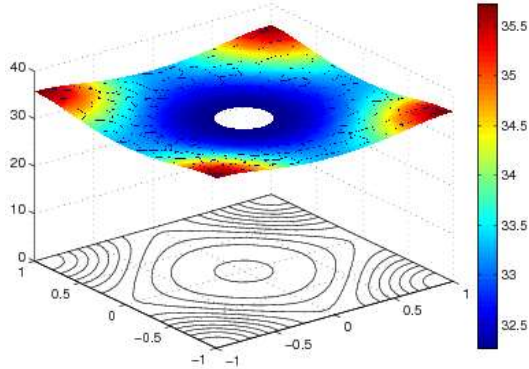
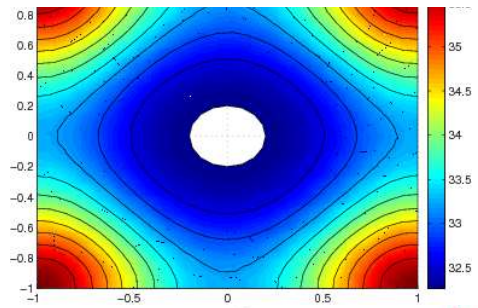


Figura 4. Isosuperficies en 2D y 3D e isolíneas para el campo de temperatura en la placa de aluminio para $t_{15} = 525s$

RESULTADOS PARA LA PLACA COMPUESTAS DE FIBRAS DE CARBONO-CARBONO

La placa es de un material compuesto de fibras de carbón reforzado con: $\rho = 1550 \text{ Kg/m}^3$, $C_p = 700 \text{ J/(Kg} \cdot \text{°C)}$, $k_{x_1} = 275 \text{ J/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{°C)}$, $k_{x_2} = 75 \text{ J/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{°C)}$ y $h_c = 10 \text{ J/(s} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{°C)}$. En las Figuras 5 y 6 se muestran las isosuperficies e isolíneas correspondientes al campo de temperatura y al perfil de este en los tiempos de simulación $t_1 = 35s$ y $t_{15} = 525s$.

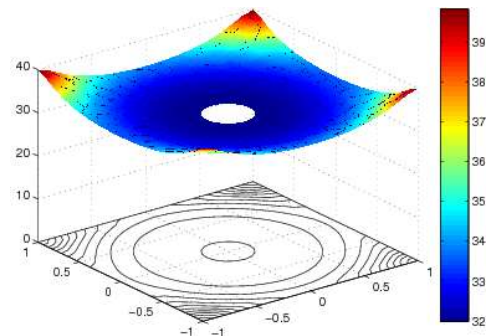
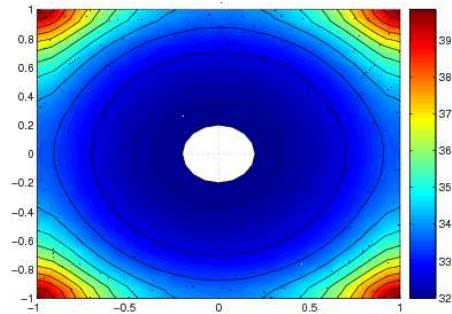
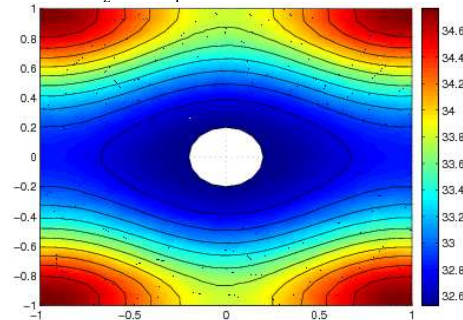


Figura 5. Isosuperficies en 2D y 3D e isolíneas. Campo de temperatura en la placa de material compuesto de carbón para $t_1 = 35s$

En este caso, además de la misma observación inicial que se tiene para el caso de la placa metálica, las isolíneas del campo de temperatura muestran que el flujo de calor no es igual en ambas direcciones, x_1 y x_2 . En efecto, la deformación de las isolíneas son tales que el flujo es mayor en la dirección x_2 tal como se esperaría en la realidad para éste material anisótropo en donde $k_{x_2} < k_{x_1}$.



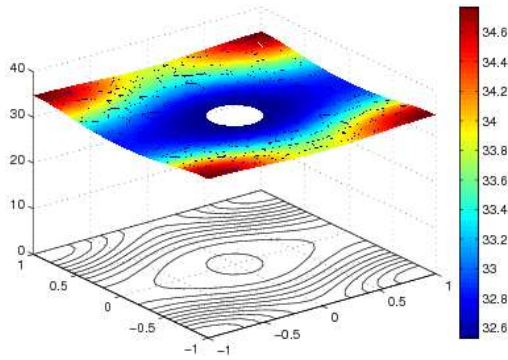


Figura 6. Isosuperficies en 2D y 3D e isolíneas. Campo de temperatura en la placa de material compuesto de carbón para $t_{15} = 525s$

CONCLUSIONES

En cada paso de tiempo, un problema de frontera con condiciones del tipo Robin (mixto) para el operador de Helmholtz modela la distribución del campo de temperatura en placas de metal y de material compuesto de fibras de carbono con perforaciones. Bajo condiciones de regularidad apropiada y consistente con los fenómenos de

conducción y convección libre, el problema de frontera para el operador de Helmholtz tiene una formulación variacional equivalente (débil) que está bien planteada en el sentido de distribuciones. La solución débil del problema variacional es una aproximación de Galerkin que se obtiene mediante la discretización de elementos finitos. Un algoritmo para el cálculo de esta solución tiene un costo computacional que es proporcional al número de elementos finitos que conforman la malla. Esta solución aproximada es estable y convergente según el error de interpolación a trozos basado en la técnica del FEM usando el elemento finito de Courant. Las cotas de este error son proporcionales a un orden del tamaño h de la malla de elementos finitos. El error es de orden h^2 respecto a la norma L^2 y de orden h respecto a la norma H^1 . Las simulaciones numéricas presentadas fueron consistentes con la regularidad impuesta sobre la data del problema de conducción de calor y con lo esperado físicamente.

REFERENCIAS

- [1]. ANGULO W. Y COLMENAREZ E. (2007): Conducción de calor en placas metálicas perforadas. Parte I: Modelo y solución débil en un paso de tiempo. *Publicaciones en Ciencias y Tecnología*, (UCLA, Barquisimeto) 1(1); 33-38.
- [2]. AXELSSON O. AND BARKER V. (1984). *Finite element solution of boundary value problems. Theory and computation, computer science and applied mathematics*. Miami: Academic Press.
- [3]. CHAVES A., COUTIN S., JUST F. (2005): Simulación numérica y estudio paramétrico de un método térmico para la detección de daños en metales y materiales compuestos tipo carbono-carbono, *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*. 4(2); 141-152.
- [4]. COLMENARES E. (2008). *Discretización de elemento finito para la ecuación de conducción de calor en metales y materiales compuestos tipo carbono-carbono*. Trabajo Especial de Grado no publicado Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”. Barquisimeto, Venezuela.
- [5]. DUTTON A. (1996): Flaw detection in composite materials using infrared thermography by the method of external heating. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 210(5); 309-407.
- [6]. GIL J., JUST-AGOSTO F., SERRANO D. Y SHAFIQ B. (2004): Detección de daños usando transferencia de calor por conducción, *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*. 3(2); 129-141.
- [7]. GIRAULT V. AND RAVIART P. (1979). *Finite element method for the navier-stokes equations. Theory and algorithms*. Berlin: Springer-Verlag.
- [8]. INCROPERA F. AND DEWITT D. (1990). *Fundamentals of heat and mass transfer*. New York: John Wiley and Sons.
- [9]. QUARTERONI A., SACCO R. AND SALERI F. (2000). *Numerical mathematics*. New York: Springer-Verlag.