Matemática: Una publicación de FCNM – ESPOL
2016, Vol. 14, No.2

ECUACIÓN DE NAVIER - STOKES UNIDIMENSIONAL

Bustamante Edgar Johni[1]. Riofrío Gonzalo Msc[2], Angel Acosta Acosta Mcs[3].

Resumen: *El presente trabajo describe una forma nueva de calcular la solución general de la ecuación de Navier - Stokes en el caso unidimensional. Sabemos que el sistema de ecuaciones de Navier - Stokes es un problema no resuelto para el caso de tres o más variables espaciales, mientras que se ha calculado soluciones en caso de una y dos variables espaciales pero en casos muy específicos, y por eso aquí presento un caso específico cuando la presión está dada por una función exponencial.*
Palabras Claves.- Ecuacion de Navier - Stokes, Riccati, Bernouille, Bessel, Caida de Presión, Viscosidad

Abstract: This paper describes a new way of calculating the general solution of the Navier - Stokes equations in the one-dimensional case. We know the system of Navier - Stokes is an unsolved problem in the case of three or more spatial variables, while calculated solutions in case of one and two spatial variables but in very specific cases, so here I present a specific case when the pressure is given by an exponential function.
Keywords.- *Navier-Stokes, Riccati, Bernoulli, Bessel, pressure drop, Viscosity.*

Recibido: Septiembre 2016
Aceptado: Septiembre 2016

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se plantea la ecuación (de partículas) que gobierna la dinámica de un fluido viscoso comprensible que viaja a través de una tubería, razón por la cual podemos considerar que la variable espacial es una sola, además el sistema es abierto, es decir el fluido viaja en una sola dirección.
Además consideraremos que la caída de presión tiene un comportamiento de una función exponencial con exponente negativo, es decir cuando x tiende al infinito entonces la caída de presión es práctica- mente cero.
Los datos para verificar los datos fueron calculados experimentalmente por el Msc. Gonzalo Riofrío y validado con datos del paper de la “Revista Mexicana de Física 59”.
El fluido en estudio es el petróleo, con características de viscosidad y comprensibilidad muy importantes y nada despreciables.
Como podrá ver en el desarrollo de este trabajo los datos de validación se realizó con ayuda del software Mathematica 11.0.

2. MODELO MATEMÁTICO DE LA ECUACIÓN DE NAVIER – STOKES UNIDIMENSIONAL.

$$k\nabla^2 u - \nabla P - u.\nabla u = \partial_t u \,, \qquad \text{Ec. (1)}$$

$Donde: \; u = u[x,t]$, Vector de velocidad

$$k = \frac{\mu}{\rho}$$

μ: Parámetro de viscosidad del fluido
ρ: Densidad del fluido
$P = P[x]$, Caída de presión.

[1]*Bustamante Johni Profesor Departamento de Matemáticas, FCNM, ESPOL (e-mail: jobustam@espol.edu.ec) Guayaquil.*
[2]*Riofrío Cruz Gonzalo R. Profesor de la Universidad Nacional de Loja, Carrera de Ingeniería Electromecánica (e-mail: gonzalo.riofrio@unl.edu.ec), Loja.*
[3]*Acosta Ángel Profesor de la Universidad Politécnica Salesiana, Facultad Ciencias Matemáticas y Físicas (e-mail: angel.acosta@ug.edu.ec), Guayaquil.*

Para el caso unidimensional entonces $u[x,t] \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, entonces la Ec. (1) se expresa:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \text{Ec(2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x} - P - \frac{u^2}{2}\right] = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \text{Ec(3)}$$

La Ec.(3) en el paper de la literatura realiza la búsqueda de la solución usando el clásico método de separación de variables, y en este momento es cuando, nuestro trabajo se diferencia, por tanto la búsqueda la realizamos dividiendo el problema en tres ecuaciones diferenciales, a continuación el desarrollo:

3 . CALCULAR *u = u(x,t)*

Buscamos la solución $u=w+v$, donde $w=w[x,t]$, $v=v[x]$ tales que satisfacen:

$$\text{SEc.(1):} \begin{cases} k\,\partial_{xx} w - w\,\partial_x w = \partial_t w & \text{Ec. (4)} \\ k\,\partial_{xx} v - \partial_x P - v\,\partial_x v = 0 & \text{Ec. (5)} \\ v\,\partial_x w + w\,\partial_x v = 0 & \text{Ec. (6)} \end{cases}$$

Verificamos que la función $u=w+v$, es solución de la Ec.(2)

$$k\frac{\partial^2(v+w)}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - (v+w)\frac{\partial(v+w)}{\partial x} = \frac{\partial(v+w)}{\partial t}$$

$$k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} - \left(w\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Reagrupamos:

$$\left(k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(w\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial w}{\partial t}$$

El primer término es $\frac{\partial w}{\partial t}$

Según Ec(4), el segundo y tercer término según Ec(5), (6) es cero además sabemos que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Por cuanto no depende del tiempo y por tanto verificamos que la parte izquierda es $\frac{\partial w}{\partial t}$ y la parte derecha es $\frac{\partial w}{\partial t}$

Lo cual demuestra que *u(x,t)* es solución de Ec(2) por lo tanto debemos calcular las funciones w y v del sistema de ecuaciones SEc(1)

3.1 Calculo de v = v(x)

De (2) tenemos:

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x} - P - \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

Entonces:

$k\frac{\partial v}{\partial x} - P - \frac{v^2}{2} = \lambda$, de donde λ es constante

$k\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v^2}{2} - P = \lambda$, Ec(7), también conocida como ecuación de Riccati.

Sea $\beta = \beta(x)$ tal que $v(x) = -2k\frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{Ln}(\beta)]$

Es decir: $v = -\frac{2k\beta'}{\beta}$, entonces $v' = -2k\left(-\frac{(\beta')^2}{\beta^2} + \frac{\beta''}{\beta}\right)$,

Reemplazamos en Ec(7)

$$k\left(-2k\left(-\frac{(\beta')^2}{\beta^2} + \frac{\beta''}{\beta}\right)\right) - \frac{\left(-\frac{2k\beta'}{\beta}\right)^2}{2} - P = \lambda$$

$$\frac{2k^2(\beta')^2}{\beta^2} - 2k^2\frac{\beta''}{\beta} + \frac{2k^2(\beta')^2}{\beta^2} - P = \lambda$$

$$-2k^2\frac{\beta''}{\beta} - P = \lambda$$

$$-2k^2\frac{\beta''}{\beta} - (P+\lambda) = 0$$

$$\beta'' + \left(\frac{P+\lambda}{2k^2}\right)\beta = 0 \qquad \text{Ec(8)}$$

Sea P una función de x tal que:

$P[x] = 2A^2 e^{-\alpha x}$, donde A y α son parámetros dados por la caída de presión.

Conocida la forma de la presión entonces inmediato nos damos cuenta del cambio de variable para transformar la Ec.(8) en una ecuación de Bessel.

Y es la nueva variable tal que $y = a e^{-\frac{\alpha x}{2}}$, donde **a** es un parámetro indeterminado el mismo que escogeremos convenientemente más adelante.

$$\frac{d}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d}{dy} = \left(-\frac{a\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha x}{2}}\right)\frac{d}{dy} = \left(-\frac{\alpha}{2}y\right)\frac{d}{dy}$$

Entonces:

$$\frac{d}{dx} = \left(-\frac{\alpha}{2}y\right)\frac{d}{dy};$$

$$\beta'' + \left(\frac{P+\lambda}{2k^2}\right)\beta = 0;$$

$$\beta'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\left(-\frac{\alpha}{2}y\right)\frac{d\beta}{dy}\right)$$

$$= \left(-\frac{\alpha}{2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\beta}{dy} + \left(-\frac{\alpha}{2}y\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{d\beta}{dy}\right)$$

$$= \left(-\frac{\alpha}{2}\left(-\frac{\alpha}{2}y\right)\right)\frac{d\beta}{dy} + \left(-\frac{\alpha}{2}y\right)\left(-\frac{\alpha}{2}y\right)\left(\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha^2}{4}y\right)\frac{d\beta}{dy} + \left(\frac{\alpha^2}{4}y^2\right)\left(\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)$$

$$\beta'' = \left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(y^2\frac{d^2\beta}{dy^2} + y\frac{d\beta}{dy}\right); \qquad R(1)$$

$$\left(\frac{P+\lambda}{2k^2}\right)\beta = \left(\frac{A e^{-\alpha x} + \lambda}{2k^2}\right)\beta$$

$$= \left(\frac{2A^2\left(e^{-\frac{\alpha x}{2}}\right)^2 + \lambda}{2k^2}\right)\beta$$

$$= \left(\frac{2A^2\left(a e^{-\frac{\alpha x}{2}}\right)^2 + \lambda}{2k^2a^2}\right)\beta$$

$$= \left(\frac{2A^2y^2 + \lambda}{2k^2a^2}\right)\beta$$

$$= \left(\frac{A^2y^2}{k^2a^2} + \frac{\lambda}{2k^2a^2}\right)\beta$$

$$= \left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{4A^2y^2}{k^2a^2\alpha^2} + \frac{2\lambda}{k^2a^2\alpha^2}\right)\beta$$

Escogemos el coeficiente indeterminado "a" tal que:

$$\frac{4A^2}{k^2a^2\alpha^2} = 1;$$

$$a^2 = \frac{4A^2}{k^2\alpha^2};$$

$$a = \frac{2A}{k\alpha};$$

Donde **A**, **k**, **α** son positivos y además y ϵ $\mathbb{R}^+$, debemos recordar que la variable x representa la posición de la partícula (flujo de partículas) y por tanto es positiva.

$$\left(\frac{P+\lambda}{2k^2}\right)\beta = \left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{4A^2y^2}{k^2a^2\alpha^2} + \frac{2\lambda}{k^2a^2\alpha^2}\right)\beta,$$

$$\left(\frac{P+\lambda}{2k^2}\right)\beta = \left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(y^2 + \frac{2\lambda}{k^2a^2\alpha^2}\right)\beta, \qquad R(2)$$

Reemplazamos R(1) y R(2) en Ec(8)

$$\beta'' + \left(\frac{P+\lambda}{2k^2}\right)\beta = 0$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(y^2\frac{d^2\beta}{dy^2} + y\frac{d\beta}{dy}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{4A^2y^2}{k^2a^2\alpha^2} + \frac{2\lambda}{k^2a^2\alpha^2}\right)\beta = 0$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(y^2\frac{d^2\beta}{dy^2} + y\frac{d\beta}{dy}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(y^2 + \frac{2\lambda}{k^2a^2\alpha^2}\right)\beta = 0$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{4}\right)\left(y^2\frac{d^2\beta}{dy^2} + y\frac{d\beta}{dy} + \left(y^2 + \frac{2\lambda}{k^2a^2\alpha^2}\right)\beta\right) = 0$$

$$y^2\frac{d^2\beta}{dy^2} + y\frac{d\beta}{dy} + \left(y^2 + \frac{2\lambda}{k^2a^2\alpha^2}\right)\beta = 0, \quad \text{Ec(9)}$$

En este momento aparece la condición para escoger el parámetro Lamda, observamos que dicho parámetro es $\sigma^2 = -\frac{2\lambda}{a^2\alpha^2k^2}$ tal que obtenemos la ecuación de Bessel

$$y^2\frac{d^2\beta}{dy^2} + y\frac{d\beta}{dy} + (y^2 - \sigma^2)\beta = 0, \quad \text{Ec(9)}$$

Entonces $\beta(y) = C_1 J_\sigma(y) + C_2 Y_\sigma(y)$

$$\beta(x) = C_1 J_\sigma\left(a\, e^{-\frac{\alpha x}{2}}\right) + C_2 Y_\sigma\left(a\, e^{-\frac{\alpha x}{2}}\right)$$

$$\beta(x) = C_1 J_\sigma\left(\frac{2A\ e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right) + C_2 Y_\sigma\left(\frac{2A\ e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)$$

C1, C2 Constantes y cuando x⟶0 entonces y⟶0, $Y_\sigma\ (0^+) \longrightarrow \infty$, por lo tanto $C_2 = 0$, es decir:

$$\beta(x) = C_1 J_\sigma\left(\frac{2A\ e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)$$

$$v(x) = -\frac{2k\beta'(x)}{\beta(x)}$$

3.2. Desarrollo de la ecuación: v ∂_x w + w ∂_x v = 0

La Ecuación (6)

$$v\,\partial_x w + w\,\partial_x v = 0 \implies \frac{\partial}{\partial x}[v.w] = 0 \implies v.w = \phi(t)\ \wedge\ v = v(x)$$

$$\implies w = \frac{\phi(t)}{v(x)} \implies w(x,t) = v(x)^{-1}\phi(t), \text{ Renombramos } \psi(x) = v(x)^{-1} = -\frac{\beta(x)}{2k\beta'(x)}$$

$$\implies w(x,t) = \psi(x)\,\phi(t)$$

3.3. Cálculo de la incógnita ϕ(t)

De la ecuación (4): $k\partial_{xx}w - w\partial_x w = \partial_t w$

$$k\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\psi(x)\,\phi(t)] - [\psi(x)\,\phi(t)]\ \frac{\partial}{\partial x}[\psi(x)\,\phi(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\psi(x)\,\phi(t)]$$

$$k\,\phi(t)\ \frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} - \psi(x)[\phi(t)]^2\ \frac{\partial\psi(x)}{\partial x} = \psi(x)\ \frac{\partial\phi(t)}{\partial t}$$

$$(k\,\psi'')\,\phi - (\psi\,\psi')\,\phi^2 = (\psi)\,\phi'$$

$$(\psi)\,\phi' - (k\,\psi'')\,\phi = (-\psi\,\psi')\,\phi^2$$

$$\phi' - \left(\frac{k\,\psi''}{\psi}\right)\phi = (-\psi')\,\phi^2$$

$$\phi'(t) - p(x)\,\phi(t) = -q(x)\,\phi^2(t),$$

Donde $p(x) = \left(\frac{k\,\psi''(x)}{\psi(x)}\right)\ \wedge\ q(x) = \psi'(x)$

$$u(x,t) = -\frac{2k\,\frac{\partial}{\partial x}\left[J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)\right]}{J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)} + \left(-\frac{J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)}{2k\,\frac{\partial}{\partial x}\left(J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)\right)}\right)$$

$$\left(1\Big/\left[C_3\,e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]\right)$$

Obteniendo así la ecuación de Bernoulli :

$$\phi'(t) - p(x)\,\phi(t) = -q(x)\,\phi^2(t) \qquad \text{Ec (10)}$$

$$\phi(t) = \left[C_3\,e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]^{-1}$$

3.4. Resultados totales

Hemos calculado la solución con varios cambio de nombres aquí el resumen de todos:

$$u(x,y) = v(x) + w(x,t)$$

Donde

$$v(x) = -\frac{2k\beta'(x)}{\beta(x)}\ \wedge\ \beta(x) = C_1 J_\sigma\left(\frac{2A\ e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)$$

$$v(x) = -\frac{2k\,\frac{\partial}{\partial x}\left[C_1 J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)\right]}{C_1 J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)}$$

Simplificamos C_1 tenemos:

$$v(x) = -\frac{2k\,\frac{\partial}{\partial x}\left[J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)\right]}{J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)}$$

Mientras:

$$w(x,t) = \psi(x)\,\phi(t)$$

$$w(x,t) = v(x)^{-1}\,\phi(t) = \left(-\frac{\beta(x)}{2k\beta'(x)}\right)\phi(t)$$

$$\phi(t) = 1\Big/\left[C_3\,e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]$$

Donde

$$\left(\frac{k\,\psi''(x)}{\psi(x)}\right)\ \wedge\ \psi(x) = -\frac{\beta(x)}{2k\beta'(x)}$$

Entonces

$$w(x,t) = \left(-\frac{J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)}{2k\,\frac{\partial}{\partial x}\left(J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)\right)}\right)\left(1\Big/\left[C_3\,e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]\right)$$

Así obtenemos:

$$u(x,t) = -\frac{2k\,\frac{\partial}{\partial x}\left[J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)\right]}{J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)} + \left(-\frac{J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)}{2k\,\frac{\partial}{\partial x}\left(J_\sigma\left(\frac{2A\,e^{-\frac{\alpha x}{2}}}{k\alpha}\right)\right)}\right)\left(1\Big/\left[C_3\,e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]\right)$$

Dónde

$$p(x)=\left(\frac{k\,\psi''(x)}{\psi(x)}\right) \;\bigwedge\; q(x)=\psi'(x) \;\wedge\; \psi(x)=-\frac{\beta(x)}{2\,k\,\beta'(x)}$$

Datos Experimentales

$$\lambda = -0.5$$

$$\alpha = \frac{1}{4}$$

$$A = P_0 = 200\ \frac{\text{psi}}{\text{in}^2}$$

$$\mu = 1.49 \times 10^{-5}\ \frac{\text{ldf . s}}{\text{in}^2}$$

$$\rho = 6.57 \times 10^{-5}\ \frac{\text{lb}}{\text{in}^3}$$

$$k = \frac{\mu}{\rho} = 0.2267$$

$$a = \frac{2A}{k\,\alpha} = \frac{400}{(0.2267)\ (0.25)} = 7057.79$$

$$\sigma^2 = -\frac{2\ (-0.5)}{(7057.79)^2\ (0.25)^2\ (0.2267)^2} = 6.24999 \times 10^{-6}$$

$$\sigma = 0.0025$$

$$u(x,t) = -\frac{2\,(0.2267)\,\frac{\partial}{\partial x}\left[J_\sigma\left(\frac{2\,(200)\ e^{-\frac{0.25x}{2}}}{(0.2267)\,\alpha}\right)\right]}{J_\sigma\left(\frac{2\,(200)\ e^{-\frac{0.25x}{2}}}{(0.2267)\ 0.25}\right)} +$$

$$\left(-\frac{J_\sigma\left(\frac{2\,(200)\ e^{-\frac{0.25x}{2}}}{(0.2267)\ 0.25}\right)}{2\,(0.2267)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(J_\sigma\left(\frac{2\,(200)\ e^{-\frac{0.25x}{2}}}{(0.2267)\ 0.25}\right)\right)}\right)\left(1\Big/\left[C_3\,e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]\right)$$

4. CONCLUSIÓN

Observamos una solución bastante compleja, pero es interesante en cuanto a la forma de búsqueda dividiendo al problema en tres ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones conocidas como lo son la ecuación de Riccati, Ecuación de Bessel y Ecuación de Bernouille.

Referencias Bibliográficas.

[1]. J. de Jesús Rubio; G. Ordaz, Revista Mexicana de Física 59 (2013) 217–223

[2] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, Mecánica de Fluidos (Reverté, Barcelona, España, 1991).