Matemática: Una publicación de FCNM – ESPOL
2016, Vol. 14, No. 2

PRINCIPIOS DE MECANICA NEWTONIANA, TERCERA PARTE

Sánchez Hernando[1]

Resumen: *En este escrito continuamos la presentación iniciada en artículo anterior con el mismo nombre como parte de la monografía Principios de Mecánica Newtoniana. Se pretende ahora presentar las características que tiene el movimiento de cuerpos no tan pequeños como los electrones ni tan veloces en comparación con la velocidad de la luz. Se analiza la relación causa efecto para el cambio de movimiento de los cuerpos a la luz de las Leyes de Newton. Haciendo énfasis en la relatividad del movimiento y en los conceptos que esto involucra.*
Palabras Clave.- Mecánica, Movimiento, Partícula, Cinemática, Inercial.

Resumen: *En este escrito continuamos la presentación iniciada en artículo anterior con el mismo nombre como parte de la monografía Principios de Mecánica Newtoniana. Se pretende ahora presentar las características que tiene el movimiento de cuerpos no tan pequeños como los electrones ni tan veloces en comparación con la velocidad de la luz. Se analiza la relación causa efecto para el cambio de movimiento de los cuerpos a la luz de las Leyes de Newton. Haciendo énfasis en la relatividad del movimiento y en los conceptos que esto involucra.*
Palabras Clave.- Mecánica, Movimiento, Partícula, Cinemática, Inercial
Recibido: Marzo 2016
Aceptado: Agosto 2016

1. INTERACCIONES Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

1.1 Definiciones previas.- El movimiento, esa propiedad de los cuerpos materiales, que se manifiesta con la capacidad de cambiar de posición según una referencia espacio-temporal, es una característica que se mantiene en los cuerpos y que la pueden transmitir a sus vecinos en sus interacciones. Por ejemplo al patear una pelota, el pie le transmite movimiento a la pelota. Un cuerpo cargado positivamente que se acerca a otro cargado positivamente también le puede transmitir movimiento.

Pero al comparar el movimiento que le puede transmitir una pelota que se mueve a 40 km/h a un auto, con el movimiento que le puede transmitir un tren al mismo auto moviéndose a 40 km/h, podemos notar que es muy diferente. El tren le transmitiría mucho más movimiento aunque la pelota y el tren se desplacen a 40 km/h. Nos atreveríamos a decir que el tren debe poseer más movimiento que la pelota. Por este motivo para considerar cuanto movimiento posee un cuerpo usaremos una cantidad que tome en cuenta también la masa del cuerpo [2].

Masa.- Con esta cantidad medimos esa resistencia que presentan los cuerpos a cambiar su movimiento [2]. Si empujamos un carro para moverlo veremos que será más difícil hacerlo que si empujamos una bicicleta. Esta diferencia la notamos por la cantidad de materia que posee. Mientras más materia posee el cuerpo ofrece más resistencia al cambio de movimiento. Para medir la masa se establece un patrón de comparación universal que es el kilogramo patrón el mismo que se refiere a la cantidad de materia que posee un cilindro de platino e iridio que se conserva en Sevres, Francia [1], aceptado universalmente para ser el patrón de masa.

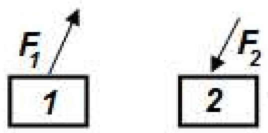
Entonces la medida que cuantifique el movimiento que posee un cuerpo la denominaremos Cantidad de Movimiento y la definiremos como:

Cantidad de movimiento ($\vec{p}$).- Por definición diremos que $\vec{p} = m\vec{v}$. Esta cantidad física nos permite cuantificar cuanto movimiento posee un cuerpo para un sistema referencial y será un valor que puede transferirse a otro cuerpo con quien interaccione.

Desde el punto de vista de las interacciones mecánicas, es decir de las interacciones que tienen que ver con el movimiento de los cuerpos, podemos notar que los efectos pueden ser variados: puede presentarse una variación en la constitución interna de los cuerpos que interaccionan que se refleje en una deformación de ellos, o puede producirse un intercambio de las cantidades de movimiento de los cuerpos que interaccionan sin deformación, o una combinación de ambos resultados.

Antes de analizar los efectos de las interacciones establezcamos una forma de cuantificar la intensidad de las interacciones, y para ello analicemos algunas otras propiedades observadas de las interacciones.

Graf. 5.1 Cuerpos interaccionando



Cuando dos cuerpos interaccionan la intensidad con la que cada uno de los cuerpos es la mismas, hecho que fue establecido por Newton [2]. En lo único que difieren es en la dirección en la cual cada cuerpo siente la interacción. Estas direcciones son contrarias como lo apreciamos en el grafico 5.1. Esta propiedad es conocida como Ley III [2].

[1]*Sanchez Caicedo Hernando Profesor del Departamento de Física, FCNM, ESPOL (e-mail: hsanchez@espol.edu.ec) Guayaquil.*

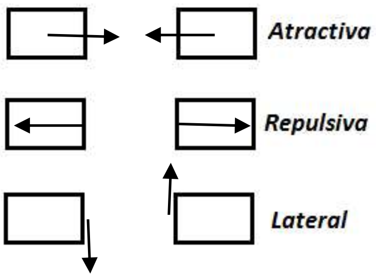
Con la finalidad de comparar diferentes interacciones se introduce una forma de medirlas por medio de una cantidad que se llama Fuerza.

Fuerza.- Cantidad física que mide la intensidad de la interacción mecánica entre dos cuerpos. Debe tener características vectoriales porque debe indicar también hacia donde se realiza la interacción.

Estableceremos esta cantidad más adelante de manera proporcional a los efectos de una interacción.

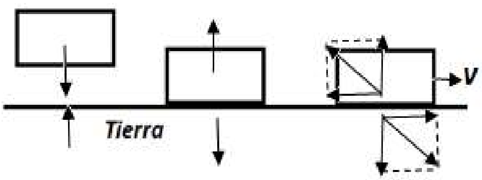
5.2 Interacciones según su orientación.- Existen algunos tipos de interacciones en la naturaleza. Según su orientación podríamos establecer tres tipos básicos:

Graf. 5.2 Formas de interaccionar



En la práctica se pueden presentar interacciones simples como las mostradas o combinaciones de ellas. Por ejemplo cuando un cuerpo y la Tierra interactúan, ambos sienten una interacción atractiva

Graf. 5.3 Ejemplos de interacciones



que se debe a la masa que poseen. Cuando un bloque descansa sobre una mesa ambos sienten interacción repulsiva debida a las cargas eléctricas en las superficies. Cuando un bloque se desplaza por el piso, la interacción se la puede descomponer en una repulsiva y una lateral, ambas de naturaleza eléctrica.

5.3 Interacciones según su naturaleza.- Si observamos la causa por la que se producen las interacciones podemos también establecer una clasificación. Para ello analizaremos primero desde las menos intensas hasta las más intensas conocidas hasta ahora.

5.3.1 Interacciones Gravitacionales.- Estas interacciones se deben a la masa que poseen los cuerpos, los mismos que sienten una atracción mutua. Newton establece que esta fuerza es proporcional al producto de las masas de los cuerpos que interaccionan e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Se manifiesta solo en forma atractiva y por lo débil de su intensidad no se puede apreciar entre dos cuerpos como los que nos rodean. Son sensibles en cuerpos con una masa grande, como ejemplo la fuerza peso que se presenta en los cuerpos cerca de la superficie de la Tierra.

Esta interacción es la responsable de mantener a la Tierra rotando alrededor del Sol, y no solamente de la Tierra sino todo el Sistema Solar.

En la tecnología moderna, para mantenernos comunicados usamos satélites que se encargan de transmitir la información y que continuamente están rotando alrededor de la Tierra gracias a la atracción gravitacional que sienten en la cercanía de la Tierra.

5.3.2 Interacciones Electromagnéticas.- Estas interacciones se deben a otra propiedad que poseen los cuerpos y llamada su carga eléctrica. Por su intensidad es más fuerte que la gravitacional pero se manifiesta cuando la propiedad carga eléctrica en los cuerpos no está equilibrada como generalmente se manifiesta. De ahí que, a pesar de ser mucho más intensa que la gravitacional, en los cuerpos de gran tamaño no es tan significativa que la gravitacional, por el hecho que la carga generalmente en los cuerpos esta equilibrada. Pero si hay desequilibrio en la cantidad de carga eléctrica, estas interacciones son mucho más intensas que las gravitacionales.

Estas interacciones por su forma de actuar pueden ser atractivas, repulsivas o laterales. De las interacciones naturales, estas son las más habituales para el desenvolvimiento de nuestra vida cotidiana, por ejemplo si deseamos hacer limpieza de nuestro cuerpo nos aprovechamos de la atracción electromagnética para eliminar impurezas. Si deseamos escribir con la pluma aprovechamos la atracción eléctrica entre la tinta y el papel. En general muchas de las actividades diarias las realizamos bajo la influencia de una interacción electromagnética.

La interacción electromagnética es también responsable de mantener a los electrones ligados a los núcleos atómicos, por lo tanto es responsable de la existencia de los átomos y de las moléculas.

Además en la década de 1960 [1], los físicos formularon una teoría por medio de la cual ciertas interacciones en el núcleo atómico tienen también naturaleza electromagnética. Esta interacción anteriormente se la llamaba interacción nuclear débil, con alcance muy pequeño por lo que solo se la siente dentro del núcleo atómico, pero es la responsable de cierta forma de radiactividad conocida como radiación beta por medio de la cual un neutrón se transforma en un protón al tiempo que expulsa un electrón y una partícula muy pequeña denominada antineutrino. Este tipo de transformación se experimenta cuando una estrella gigante experimenta una explosión catastrófica y se convierte en una supernova. Es por esto que en vez de hablar de interacciones electromagnéticas, algunos autores hablan de la interacción electro débil.

5.3.3 Interacciones Nucleares Fuertes.- En el núcleo atómico existe una interacción atractiva muy fuerte, mucho más fuerte que la electromagnética que es la que mantiene unidos a todos los protones del núcleo y a protones con neutrones, superando a la fuerte repulsión eléctrica existente entre cuerpos cargados positivamente y que se mantienen a corta distancia. Esta interacción denominada nuclear fuerte es la responsable de mantener casi toda la masa del átomo concentrada en el núcleo.

A pesar de ser tan fuerte su alcance es muy corto por lo que solo se manifiesta a distancias menores a las nucleares.

En el Sol esta interacción es la responsable de que en el núcleo del Sol sucedan las reacciones termonucleares que producen el calor y la luz que recibimos diariamente.

5.4 Intensidad de las interacciones.- Como lo anotábamos antes en las interacciones mecánicas se pueden producir deformaciones de los cuerpos, variaciones de sus cantidades de movimiento o ambos resultados a la vez. Para establecer una medida de la intensidad de una interacción vamos solo a tomar en cuenta la variación de la cantidad de movimiento asumiendo que las deformaciones son despreciables.

Entonces podemos decir que una interacción es muy intensa si produce un gran cambio en la cantidad de movimiento, pero como el movimiento es relativo, depende de la referencia, entonces para cierta referencia podemos decir que la intensidad de la interacción es proporcional al cambio de cantidad de movimiento que produce. Para cierta referencia, si el cambio de cantidad de movimiento fue pequeño entonces fue pequeña la intensidad de la interacción.

Pero existen casos donde esta proporcionalidad no se observa. Por ejemplo si vamos en un bus y observamos una pelota en el piso cuando el chofer comienza a frenar podemos observar variación de la cantidad de movimiento de la pelota sin que la pelota haya experimentado una interacción que pueda producir este cambio. O si vamos en un tren acelerado podemos observar a un cuerpo suspendido del techo del vagón desviarse de la vertical con una interacción que no produce cambio en su cantidad de movimiento. Pero estos ejemplos donde no se cumple la proporcionalidad planteada se deben solo al observador. Porque si observamos a la pelota desde la calle notaremos que no hay ningún cambio en su cantidad de movimiento. O si observamos el cuerpo suspendido desde fuera del tren podemos notar que si está sufriendo cambio su cantidad de movimiento porque él va acelerado junto con el tren.

Entonces estos observadores para los que la interacción produce cambio de cantidad de movimiento proporcional a la intensidad de la interacción, y donde si no se experimentara cambio de cantidad de movimiento es porque no hay interacción, los llamaremos observadores inerciales.

Según Newton en su Ley I [2], establece que para Observadores Inerciales en ausencia de interacción neta un cuerpo no puede sentir cambio en su cantidad de movimiento.

Esto permite establecer un camino para medir la intensidad de las interacciones.

Pero el cambio en la cantidad de movimiento de por si no es bueno para medir la intensidad de una interacción. Por ejemplo un cambio de 10 en la cantidad de movimiento podría ser pequeño si se produce en un tiempo de 5 minutos, comparado con un cambio de 10 que sucede en 5 segundos. Pero en cambio si lo comparamos con un cambio de 10 que se produce en 5 horas será muy grande. En el primer caso el cambio de 10 en 5 minutos es menos rápido que un cambio de 10 en 5 segundos. En el segundo caso el cambio de 10 en 5 minutos es más rápido que el cambio de 10 en 5 horas.

Entonces podemos medir la intensidad de la interacción observando que para observadores inerciales la intensidad de la interacción es proporcional a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento (Ley II de Newton [2]).

La medida de la intensidad de interacción se denomina Fuerza y es una cantidad vectorial porque lleva información de su magnitud y de su orientación.

$$\vec{F} \propto \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (5.1)$$

En el Sistema Internacional de Unidades se establece que la constante de proporcionalidad sea igual a 1 de manera que esta relación nos permite establecer la unidad de medida de fuerza, el Newton (N):

$$1\,N = 1\frac{kg\,\frac{m}{s}}{s} \qquad (5.2)$$

La intensidad de la interacción es de 1 N si es capaz de producir en el cuerpo un cambio en la cantidad de movimiento de 1 kg m/s en un tiempo de 1 segundo.

Y de esta manera diremos que:

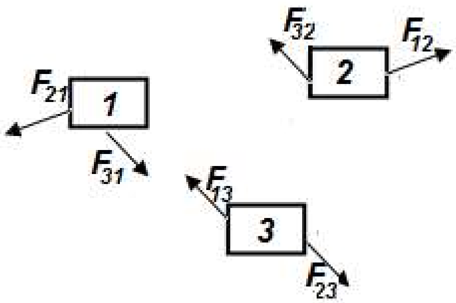
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (5.3)$$

Esta relación de igualdad es de equivalencia en la práctica solo para observadores inerciales y en el caso que no se produzcan deformaciones en los cuerpos. Si cambia la cantidad de movimiento es porque hay una interacción y si hay una interacción entonces cambiara la cantidad de movimiento.

Para observadores no inerciales esta relación no se cumple, porque se puede observar cambios en el movimiento sin necesidad de interacción o en otros casos en presencia de interacción no se observa que la cantidad movimiento cambie.

5.5 Orientación de la Interacción. - Ya lo estableció Newton que en la interacción de dos cuerpos ambos sienten la misma intensidad, aunque la orientación es de sentidos opuestos. Pero si me preocupa el movimiento de un cuerpo, voy a fijarme en él y ver con quien interactúa.

Graf. 5.4 Tres cuerpos interaccionan



En el grafico 5.4 tenemos tres cuerpos interactuando. Cada uno de ellos sentirá dos fuerzas y en la aproximación que estamos analizando, observador inercial y ausencia de deformaciones, entonces cada cuerpo deberá sentir dos variaciones de su cantidad de movimiento, que conforme a lo que se observa en la práctica, estas variaciones son aditivas. Si observamos entonces al cuerpo 1 el sentirá una fuerza neta:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \qquad (5.4)$$

La fuerza neta sobre el cuerpo 1 se compone por la fuerza de 2 sobre 1 más la fuerza de 3 sobre 1.

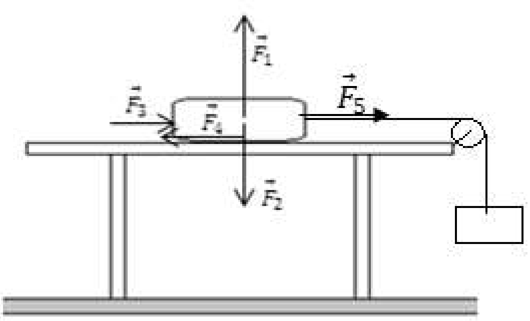
Cada una de estas fuerzas produce un cambio en la cantidad de movimiento que observando la aditividad de la interacción tendremos que el cuerpo 1 experimentara una variación neta de su cantidad de movimiento dada por:

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \qquad (5.5)$$

De esta relación podemos sacar tanto el valor neto del cambio de la cantidad de movimiento como la orientación neta del cambio en la cantidad de movimiento. La dirección del cambio de la cantidad de movimiento del cuerpo 1 estará dada por la orientación de la fuerza neta sobre 1.

5.6 Definición de algunas fuerzas habituales. - Analicemos un bloque que descansa sobre una mesa en el laboratorio y es empujado por un agente externo como se muestra en el grafico 5.5.

Graf. 5.5 Tres cuerpos interaccionan



Con F1 hemos graficado la repulsión que sufre el bloque cuando interacciona con la mesa. Esta tiene naturaleza electromagnética y la denominaremos fuerza de presión. A su vez la mesa sentirá una fuerza de repulsión electromagnética, de igual intensidad, que en este caso no graficamos porque el objeto de estudio es el bloque.

La fuerza F2 tiene naturaleza gravitacional y se debe a la interacción atractiva con la Tierra. La Tierra y el bloque se atraen mutuamente con fuerza F2 que denominaremos peso. La magnitud de esta fuerza es directamente proporcional a la masa y la constante de proporcionalidad cerca de la superficie de la Tierra y a nivel del mar tiene un valor de $g = 9.8\ {}^{m}/_{s^2}$ y se la denomina gravedad $F_2 = mg$.

La fuerza F3 es una fuerza que del enunciado no se puede saber su naturaleza, pero corresponde a la interacción con un agente externo.

La fuerza F4 corresponde a una interacción de naturaleza electromagnética, que es paralela a la superficie de contacto y por lo tanto corresponde al tipo de interacción lateral. Es una componente de la fuerza de naturaleza electromagnética en el contacto entre dos cuerpos. Se la denomina fuerza de fricción. Más adelante estableceremos su forma de cuantificarla.

La fuerza F5 es también de naturaleza electromagnética, aunque esta es una fuerza de atracción entre el bloque y la cuerda. Esta fuerza generalmente se la denomina fuerza de tensión.

5.7 Aplicaciones de las Leyes de la Mecánica. – Al momento de aplicar estas leyes a la solución de problemas hay que tener en cuenta los siguientes aspectos:

a) La expresión 5.3 o Ley II tiene validez para observadores inerciales y es aplicable en los casos en que las deformaciones de los cuerpos no son significativas.

b) La expresión 5.3 es una relación vectorial y por lo tanto en el espacio tridimensional genera tres ecuaciones independientes:

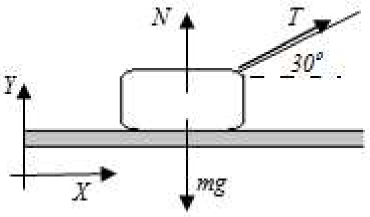
$$\begin{cases} F_x = \dfrac{dp_x}{dt} \\ F_y = \dfrac{dp_y}{dt} \\ F_z = \dfrac{dp_z}{dt} \end{cases} \qquad (5.6)$$

c) En muchos casos, cuando la masa poco cambia en el movimiento o no cambia, entonces la consideramos constante y las ecuaciones 5.6 toma una forma más sencilla:

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{dv_x}{dt} \\ F_y = m\dfrac{dv_y}{dt} \\ F_z = m\dfrac{dv_z}{dt} \end{cases} \qquad (5.7)$$

Estas ecuaciones nos permiten encontrar las componentes de la aceleración como en el siguiente ejemplo:

Graf. 5.6 Cuerpo que desliza



Una caja 5 kg desliza sobre el suelo tirada por medio de una cuerda con una fuerza de T=30 N como se muestra en el grafico 5.6. Asumiendo que la fricción es despreciable, ¿cuál debe ser la aceleración de la caja?

Tomando en cuenta que este problema es bidimensional, las ecuaciones 5.7 nos dan:

$$\begin{cases} Tcos30 = ma_x \\ Tsin30 + N - mg = 0 \end{cases} \qquad (5.8)$$

Despejando de la primera ecuación obtenemos la aceleración y de la segunda obtenemos la fuerza de presión N:

$$a_x = \frac{Tcos30}{m} = \frac{5(0.866)}{30} = 0.144\ {}^{m}/_{s^2}$$

$$N = mg - Tsin30$$

$$N = 5(9.8) - 30(0.5) = 34\ N$$

Las relaciones 5.7 también son útiles al momento

Tabla 5.1 Reglas de anti derivación

N	Función	Primitiva
1	0	A=const
2	A	At+B (B=const)
3	At^n	$A\frac{t^{n+1}}{n+1} + B$
4	Asint	-Acost +B
5	Acost	Asint + B
6	Ae^t	$Ae^t + B$
7	Aa^t	$\frac{Aa^t}{lna} + B$

de calcular las componentes de la velocidad. Aunque para ello debemos tomar en cuenta que la velocidad está dentro de una derivada y por lo tanto para obtenerla hay que seguir reglas inversas a las de derivación, que llamaremos reglas de anti derivación.

5.8 Reglas de anti derivación. – Conforme a lo establecido en la tabla 3.3 las relaciones inversas llamaremos primitivas y las exponemos en la tabla 5.1.

La regla 1 de la tabla 5.1 es lo contrario de la regla 1 de la tabla 3.3. Es decir, siempre debemos agregar una constante a determinar cuando obtengamos una primitiva porque el cero aditivo siempre estará en las expresiones, aunque no lo escribamos.

La regla 2 establece que la anti derivada de una constante será una función lineal. Además, como apreciamos en todas estas reglas una constante multiplicativa como A se mantiene en la anti derivada.

Las reglas 4,5,6 y 7 son las relaciones inversas a las correspondientes relaciones 4,5,6 y 7 de la tabla 3.3.

Estas reglas se pueden usar siempre que las fuerzas o el segundo miembro de la ecuación sea solo función del tiempo. Por ejemplo si la fuerza que le aplicamos a un cuerpo de 3 kg de masa es: $F_x = 6t^2 + 9$, entonces de las relaciones 5.7 escribiremos:

$$6t^2 + 9 = 3\frac{dv_x}{dt} \rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 2t^2 + 3$$

Por lo que aplicando la regla 3 de la tabla 5.1 sacamos la velocidad:

$$v_x = 2\frac{t^3}{3} + 3t + B \qquad (5.9)$$

La constante B que aparecerá siempre al anti derivar la obtendremos de condiciones que traiga el problema y que relacionen en este caso la velocidad y el tiempo. Una condición que muchas veces aparece en los ejercicios es: “partió del reposo”. De aquí podemos escribir la condición:

$$Para\ t = 0 \quad v_x = 0$$

Esta condición debe ser válida para la ecuación 5.9 lo que nos da:

$$0 = 2\frac{0^3}{3} + 3(0) + B \quad \rightarrow \quad B = 0$$

Y la velocidad de este ejercicio para cualquier tiempo será:

$$v_x = 2\frac{t^3}{3} + 3t \qquad (5.10)$$

De igual manera, de la definición de velocidad, por medio de la anti derivación se puede obtener la posición en cualquier instante de tiempo. Supongamos un móvil cuya velocidad en un movimiento bidimensional está dada por la relación:

$$\vec{v} = 5sint\vec{i} + 5cost\vec{j} \qquad (5.11)$$

Pero la definición de velocidad nos dice que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5sint \\ \frac{dy}{dt} = 5cost \end{cases} \qquad (5.12)$$

Usando las reglas 4 y 5 de la tabla 5.1 la posición estará determinada por las relaciones:

$$\begin{cases} x = 5cost + B_1 \\ y = -5sint + B_2 \end{cases} \qquad (5.13)$$

Para determinar completamente la posición se necesitan encontrar los valores de las constantes por lo que necesitamos dos condiciones que pedir al problema. Estas podrían ser:

$$Para\ t = \frac{\pi}{2}\ s \qquad x = 5\ m$$

$$Para\ t = \frac{\pi}{2}\ s \qquad y = 0$$

Entonces las expresiones 5.13 nos dan:

$$\begin{cases} 5 = 5cos\frac{\pi}{2} + B_1 \quad \rightarrow \quad B_1 = 5 \\ 0 = -5sin\frac{\pi}{2} + B_2 \rightarrow B_2 = 5 \end{cases} \qquad (5.15)$$

Que nos dan la posición:

$$\begin{cases} x = 5cost + 5 \\ y = -5sint + 5 \end{cases} \qquad (5.15)$$

5.9 Modelos de fricción. – En los problemas de Mecánica muchas veces aparece este tipo de fuerzas, que como anotáramos antes es de naturaleza electromagnética y es la componente paralela a la superficie cuando dos cuerpos interaccionan por contacto. Para nuestros fines vamos a distinguir dos casos que nos interesaran para los problemas de Mecánica, estos son: fricción seca o fricción entre sólido y sólido, y fricción viscosa cuando interacciona un sólido con un fluido.

5.9.1 Modelos para fricción seca. - Para el análisis de la fricción en Mecánica se acostumbra usar modelos fenomenológicos para su cuantificación. En el caso de la fricción seca se usan dos modelos diferentes, uno para cuando las superficies en contacto deslizan una con respecto a la otra y otro modelo para cuando no hay deslizamiento.

En el caso de fricción seca sin deslizamiento el modelo que se usa y que trabaja como una buena aproximación no nos da un valor para la fuerza, solo nos dice que la fricción seca sin deslizamiento no puede superar un tope máximo que depende de las superficies en contacto:

$$f_s \leq \mu_s N \qquad (5.16)$$

El tope está es proporcional a la magnitud de la fuerza de presión entre las superficies, con un coeficiente característico de las superficies que interactúan y que se denomina coeficiente de fricción estático.

La orientación de la fuerza está dada de las condiciones del problema y no hay una regla definida que nos de su orientación.

El signo igual de esta desigualdad se realiza en el instante que las superficies estén a punto de deslizar una con respecto a la otra.

En el caso de que las superficies en contacto estén deslizando una con respecto a la otra el modelo que usamos generalmente obedece a una proporcionalidad entre la fuerza de presión y la fuerza de fricción con una constante de proporcionalidad denominada contante de fricción cinética.

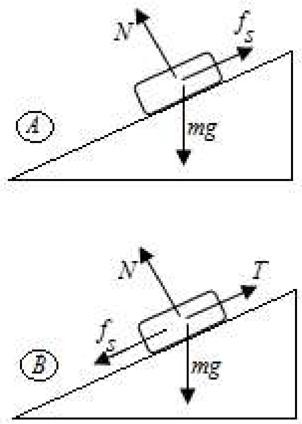
$$f_k = \mu_k N \qquad (5.17)$$

Para efectos prácticos y no muy especiales estos modelos trabajen bien. Las características de las superficies se han resumido en una constante que tiene que ser calculada experimentalmente.

Como ejemplo analicemos un cuerpo que reposa en la pendiente de un plano inclinado. Al no haber deslizamiento entre las superficies entonces hablaremos de fricción estática.

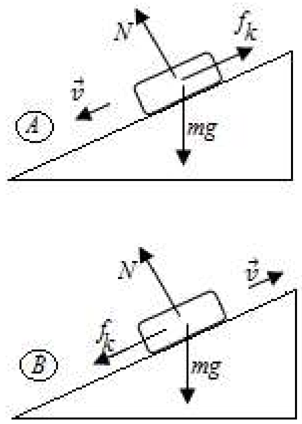
En el caso A en cuerpo tiende, por la atracción del peso, a deslizar hacia abajo del plano inclinado, por lo que debe existir una fricción estática dirigida hacia arriba del plano para que el cuerpo no deslice.

Graf. 5.7 Fricción



En el caso B aparece una fuerza externa T hacia arriba y si el cuerpo no desliza puede estar la fricción estática hacia arriba o hacia abajo. Si la tensión T es pequeña comparada con el peso, no habrá problema y el cuerpo intentará resbalar hacia abajo y por lo tanto la fricción actuará hacia arriba impidiéndole deslizar. Pero puede ser la fuerza T lo suficiente grande para que el cuerpo tienda a deslizar hacia arriba. Ahora la fricción estática se orientará hacia abajo. Es por esto que en algunos casos no se puede en los ejercicios saber la orientación de la fricción y habrá que ver el signo del valor calculado para decidir su orientación verdadera.

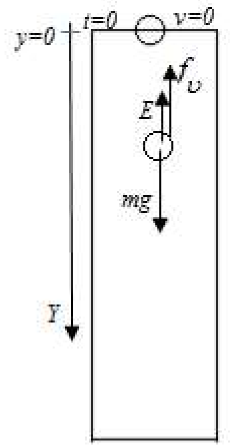
Graf. 5.8 Fricción cinética



En el caso de la fricción cinética es más fácil encontrar su orientación. La fricción cinética está orientada en contra del movimiento relativo de las superficies. En el grafico 5.8 el caso A representa un cuerpo que está deslizando hacia abajo del plano y por lo tanto la fricción cinética se orienta hacia arriba. En el caso B el cuerpo desliza, pero hacia arriba por lo que la orientación de la fricción será hacia abajo.

5.9.2 Modelos para fricción viscosa. – Este tipo de fricción es significativa cuando las superficies en contacto deslizan, y su valor depende de la rapidez con la que las superficies deslicen una con respecto a la otra. En lo que respecta a su orientación siempre estará en contra de la velocidad relativa de las superficies en contacto. Para cuantificar su magnitud existen varios modelos que se podrían usar. De los más sencillos, y por utilidad didáctica presentaremos el modelo lineal y el modelo cuadrático.

Graf. 5.9 Fricción Viscosa



5.9.2.1. Modelo lineal. En el modelo lineal podemos decir que la fuerza de fricción es:

$$\vec{f}_\vartheta = -b\vec{v} \qquad (5.18)$$

Aquí el signo que hemos usado es para indicar que se opone a la dirección de la velocidad y la constante b depende del fluido y del solido en contacto. Este modelo es útil a velocidades no muy grandes y en interacciones solido líquido.

Como ejemplo revisemos la caída de una canica en una piscina con agua. Vamos a usar como dato, que la masa de la canica es m y permanece constante, la constante b es conocida, y que dejamos caer la canica en la superficie del agua partiendo del reposo.

Para el sistema referencial fijo con la Tierra que vamos a considerar inercial, las leyes de movimiento 5.7 nos dan:

$$mg - E - f_\vartheta = m\frac{dv_y}{dt} \qquad (5.19)$$

Las fuerzas que siente la canica cuando desciende son el peso en su interacción con la Tierra, la fuerza de presión del líquido sobre la canica cuya resultante es hacia arriba (E) y la fuerza de fricción viscosa que también está hacia arriba mientras la canica se mueve hacia abajo. Al usar el modelo lineal para la fuerza viscosa y simplificando esta relación obtenemos:

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{E}{m} - \frac{b}{m}v_y \qquad (5.20)$$

La relación 5.20 nos presenta el comportamiento de la aceleración en función de la velocidad y que se muestra en el grafico 5.10.

Este decrecimiento de la aceleración se debe al incremento de la fuerza viscosa conforme aumenta la velocidad. Pero, como se aprecia en el gráfico 5.10, el incremento de la velocidad no es indefinido, porque la aceleración se hace cero y ya no puede haber incremento de la velocidad. Es decir, la velocidad se incrementará hasta alcanzar un cierto valor máximo que se logra el momento que la aceleración se anula. Esta velocidad la llamaremos velocidad terminal y la podremos obtener de la relación 5.20 haciendo la aceleración cero:

$$0 = g - \frac{E}{m} - \frac{b}{m}v_y \rightarrow v_y = \frac{mg}{b} - \frac{E}{b} = v_t$$

En el caso que se desee estudiar el comportamiento para la velocidad en cualquier instante de tiempo podemos, de la relación 5.20, despejar la velocidad. Esto implica resolver una ecuación donde la incógnita está dentro de una derivada y además también está fuera de la derivada. Si la velocidad, incógnita, no apareciera a la derecha de la ecuación entonces solo habría que anti derivar. En este caso y en casos parecidos vamos a relacionar nuestro problema con dos funciones de variables diferentes que difieren solo en un valor constante:

$$f(u) - g(v) = C \qquad (5.21)$$

Los diferenciales de estas dos funciones serán iguales, ya que el diferencial de una contante es nulo:

$$df(u) = dg(v) \rightarrow \frac{df}{du}du = \frac{dg}{dv}dv \quad (5.22)$$

Entonces podemos ir de 5.21 a 5.22 usando las reglas de derivación o ir de 5.22 a 5.21 usando las reglas de anti derivación.

Para que la expresión 5.20 tome la forme de la relación 5.22 despejaremos algunos términos para que se separen las variables:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{b}{m}\left(v_t - v_y\right) \rightarrow \frac{1}{v_t - v_y}dv_y = \frac{b}{m}dt$$

Esta expresión es similar a la 5.22, por lo que anti derivando los coeficientes en esta última relación obtendremos una ecuación parecida a la 5.21:

$$-\ln\left(v_t - v_y\right) = \frac{b}{m}t + C \qquad (5.23)$$

Esta expresión debe satisfacer las condiciones del problema por lo que usando la condición inicial podemos encontrar el valor que debe tener C en este problema:

$$Para\ t = 0 \quad v_y = 0 \quad \rightarrow -\ln v_t = C$$

$$-\ln(v_t - v_y) = \frac{b}{m}t - ln\frac{b}{m}$$

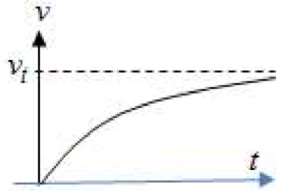
Y de aquí obtendremos la velocidad:

$$v_y = v_t\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \quad (5.24)$$

El grafico de esta función tiende hacia el valor asintótico que es la velocidad terminal.

Al analizar el resultado obtenido recordemos que

Graf. 5.11 Velocidad de la canica



esto es un modelo que se aproxima a la realidad y por lo tanto no se alcanza en ningún tiempo la velocidad terminal. En la práctica, transcurrido un cierto tiempo se alcanza la velocidad terminal y de ahí en adelante la caída de la caída se hace con velocidad constante.

<u>Recogiendo lo que hicimos para obtener la velocidad, podríamos establecer un mecanismo para resolver estas ecuaciones: a) Llevar la ecuación a la forma 5.21 separando las variables que intervienen en la forma diferencial, b) Usar las reglas de anti derivación para anti derivar los coeficientes y llevar la ecuación a una relación similar a 5.22, c) encontrar la constante de las condiciones del problema.</u>

En el caso de que necesitemos obtener la posición de la canica para cualquier instante de tiempo, partiendo de la expresión para la velocidad, debemos notar que en 5.24 el segundo miembro depende solo del tiempo:

$$\frac{dy}{dt} = v_t\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \quad (5.24)$$

Entonces solo será necesario anti derivar el segundo miembro con las reglas de la tabla 5.1:

$$y = v_t\left(t - \left(-\frac{m}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t}\right) + C$$

Si usamos la condición de que la canica partió desde y=0 podremos encontrar la constante:

$$0 = v_t\frac{m}{b} + C \rightarrow C = -v_t\frac{m}{b}$$

Lo que no dice que la posición en función del tiempo será igual a:

$$y = v_t\left(t - \frac{m}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right) \quad (5.25)$$

Esta función tiene una recta asíntota a la que tiende la posición para tiempos grandes, es decir cuando se alcanza la velocidad terminal:

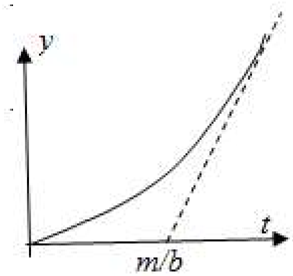
$$y = v_t\left(t - \frac{m}{b}\right)$$

5.9.2.2 Modelo Cuadrático. En el modelo cuadrático asumiremos que la fuerza viscosa tiene una magnitud $f_\vartheta = kv^2$ proporcional al cuadrado de la velocidad y siempre oponiéndose a la dirección de la velocidad relativa de deslizamiento, y la constante k tendrá un valor que depende de la forma y volumen del solido en movimiento. En el caso que dejemos caer una hoja de papel la constante k se puede reducir arrugando el papel

Graf. 5.10 Aceleración de la canica

a_y

Graf. 5.12 Posicion de la canica



hasta convertirla en una pequeña esfera y por lo tanto caerá más rápido porque el aire ejerce menos resistencia.

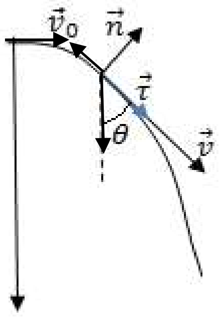
Analicemos la caída de un cuerpo desde un avión que se desplaza con una velocidad horizontal v_0. Su caída describirá una trayectoria semejante a la de una parábola, aunque la fricción hará que la trayectoria no sea parábola.

En el grafico 5.13 hemos dibujado la trayectoria y usaremos coordenadas naturales para describir este movimiento. La vertical será la dirección de referencia.

Hay dos fuerzas actuando sobre el cuerpo: el peso con dirección vertical hacia abajo y la fuerza de fricción en contra de la dirección $\vec{\tau}$ tangencial.

Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de este cuerpo y usando la expresión 4.6 para la aceleración en coordenadas naturales obtenemos:

Graf. 5.13 Posicion de la canica



$$\begin{cases} -kv^2 + mgcos\theta = m\dfrac{dv}{dt} \\ -mgsin\theta = mv\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad (5.26)$$

Si analizamos estas funciones, de la segunda expresión notamos que la derivada del ángulo θ es negativa lo que implica que este ángulo va a decrecer que es lo que le da la forma parecida a la parábola a la trayectoria.

El ángulo θ va a decrecer y pronto será muy pequeño, cercano a cero y será como una caída vertical.

En la aproximación de ángulo pequeño ($cos\theta \approx 1$), la primera función nos dice que la fuerza neta va a ir disminuyendo conforme la rapidez se incremente, lo que producirá un instante cuando la aceleración se anule y el cuerpo alcance una velocidad terminal:

$$-kv^2 + mg = m\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

En el caso de los paracaidistas pueden controlar esta velocidad jugando con la constante k, es decir con el volumen del cuerpo.

Bibliografía

[1] Física Universitaria V. 1, Sears Zemansky, Editorial Pearson Educación, México 2013

[2] Principios matemáticos de la Filosofía Natural, Isaac Newton, Alianza Editorial, 2011 ISBN: 9788420651927

[3] Leithold Louis. El Cálculo. Oxford University Press. Séptima edición. 1998