MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL

2019, Vol.17, No. 1 Publicado: 2019-06-30

Esquematización del problema de clasificación de conjuntos. Caso de estudio: la clasificación de la ecuación cuadrática de dos variables

Schematization of the sets classtification problem.
Case Study: The classification of the quadratic equation of two unknowns

Jonathan Ortiz y Andrés Merino

Resumen En el presente artículo se expone una formalización del problema de clasificación de conjuntos y una esquematización para su resolución. Se aborda el caso de estudio de la Clasificación de la ecuación cuadrática en dos variables para ejemplificar el procedimiento propuesto. Con esto, se plantea un acercamiento didáctico a la metodología planteada para la clasificación de conjuntos, el cual puede ser utilizado por parte de los docentes de los primeros años de educación superior en sus alumnos.
Palabras clave: Clasificación de conjuntos, cónicas, didáctica matemática.

Abstract In this paper we show a formal approach for the classification problem and a schematization for its resolution. We take the study case of the classification of the quadratic equation of two unknowns in order to illustrate the given procedure. With this, we propose a didactic approach to the methodology exposed for the classification problem which could be used by docents of university freshman students in their classes.
Keywords: sets classification, conics, mathematical didactics.

Jonathan Ortiz
Matemático, Técnico Docente, Departamento de Formación Básica, Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador. e-mail: jonathan.ortizc@epn.edu.ec

Andrés Merino
Matemático MSc., Profesor Titular, Escuela de Ciencias Físicas y Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Quito, Ecuador. e-mail: aemerinot@puce.edu.ec

1. Introducción

El problema de clasificación de conjuntos es recurrente durante el estudio de diversos campos de la Matemática, por ejemplo, este problema pueden ir desde la clasificación de las isometrías del plano euclidiano [2] hasta la clasificación de los grupos finitos simples [1]; de aquí, la importancia de la elaboración de una esquematización formal, que vaya de la mano de una metodología adecuada, para abordar este tipo de problemas.

Para presentar la esquematización y la metodología propuesta, este trabajo se basará en el caso de estudio de la *Clasificación de la ecuación cuadrática de dos variables*. A pesar de que la solución de este problemas es ampliamente conocida, y se la puede encontrar en [3, 4] (utilizando tanto herramientas geométricas [7] como herramientas algebraicas, formas cuadráticas, [8]), se ha seleccionado este caso dado que las herramientas necesarias para llegar a su solución son únicamente las desarrolladas en el programa de Bachillerato General Unificado (BGU) del Ecuador [5], por lo tanto, la metodología propuesta puede ser presentada a estudiantes de últimos años de bachillerato o de primeros años de educación superior que tomen materias con contenido de Geometría Analítica. Así, este trabajo esta dirigido a estos estudiantes y sus docentes de matemática.

De manera concreta, en términos acordes al programa del BGU, el problema de la clasificación de la ecuación cuadrática de dos variables puede enunciarse de la siguiente manera:

> Dada la ecuación cuadrática de dos variables
>
> $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$
>
> con $A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}$, donde por lo menos uno de los valores de A, B y C es diferente de 0; establecer si la gráfica que genera en el plano es una parábola, elipse o hipérbola.

Es decir, la clasificación de la ecuación estará dada por su representación gráfica en el plano; con lo cual, estudiaremos específicamente la representación gráfica del conjunto

$$\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0\}. \tag{2}$$

Para iniciar el estudio de este problema, primero procedemos a formalizar el significado de clasificación. Dado un conjunto $\mathscr{D}$, una clasificación de $\mathscr{D}$ es cualquier partición de esta, es decir, es una familia $\{\mathscr{D}_i\}_{i\in I}$ tal que estos sean disjuntos dos a dos y

$$\bigcup_{i\in I}\mathscr{D}_i=\mathscr{D}.$$

El problema de clasificación viene dado en dos aspectos.

1. Dada una familia $\{\mathscr{D}_i\}_{i\in J}$, tal que sean disjuntos dos a dos, el problema consiste en establecer si es o no una clasificación, es decir, determinar si $\bigcup_{i\in J}\mathscr{D}_i=\mathscr{D}$. De no darse el caso, se tiene un conjunto

$$\mathscr{D}_c = \mathscr{D} \setminus \bigcup_{i \in J} \mathscr{D}_i \neq \varnothing,$$

al cual se los conocerá como *casos no deseados*. Así, se obtiene la clasificación:

$$\{\mathscr{D}_i\}_{i \in J \cup \{c\}}.$$

2. Una vez obtenida una clasificación $\{\mathscr{D}_i\}_{i \in I}$ de $\mathscr{D}$, debemos establecer un procedimiento efectivo para que, dado $x \in \mathscr{D}$, podamos determinar el único elemento $i \in I$ para el cual $x \in \mathscr{D}_i$.

Aquí, utilizamos la idea de *procedimiento efectivo* dada en [6], es decir, un proceso que siempre encuentre una solución en un número finito de pasos. Además, intuitivamente, buscaremos un *procedimiento eficiente*, es decir, un procedimiento que utilice "pocas" operaciones para llegar a la solución.

2. Esquematización del problema

La esquematización del problema de la clasificación de una clase $\mathscr{D}$ que se presenta en este trabajo está dividida en las siguientes etapas:

1. *Visualización de casos particulares conocidos:* En este punto, se genera, utilizando conocimientos previos, una familia $\{\mathscr{D}_i\}_{i \in J}$, cuyos elementos sean disjuntos dos a dos, la cual será la potencial clasificación del conjunto $\mathscr{D}$.
2. *Visualización de casos particulares no deseados:* En este punto, se determina si el conjunto $\mathscr{D}_c$, definido anteriormente, es vacío o no. Con esto, se tiene la clasificación del conjunto $\mathscr{D}$.
3. *Generalización de casos particulares no deseados:* En este punto, se estudia a profundidad las características del conjunto $\mathscr{D}_c$ para contar con herramientas que permitan discernir si un $x \in \mathscr{D}$ dado es o no elementos de $\mathscr{D}_c$.
4. *Establecimiento de analogías en casos particulares:* En este punto, se analizan elementos particulares de cada $\mathscr{D}_i$ con $i \in I$ para la determinación de analogías entre los mismos.
5. *Determinación de condiciones suficientes de pertenencia, bajo restricciones:* En este punto, se establecen condiciones suficientes que determinen un procedimiento efectivo que permita identificar el conjunto $\mathscr{D}_i$, con $i \in I$, al cual pertenezca un elemento dado de $\mathscr{D}$. Para este propósito, se asumen hipótesis extras (restricciones) que ayuden a la determinación de las condiciones.
6. *Generalización de condiciones necesarias y suficientes de pertenencia:* En este punto, se generalizan las condiciones planteadas en el punto anterior, eliminando las hipótesis extras, para conseguir condiciones necesarias y suficientes de pertenencia.

Bajo estas etapas se da solución a los dos problemas de clasificación de conjuntos planteados en la Sección 1.

3. Formalización del problema

Para la aplicación de la metodología planteada, debemos empezar formalizando el problema. Teniendo en cuenta las definiciones clásicas de cónica, parábola, elipse e hipérbola (ver [7]), definamos el conjunto

$$\mathscr{D} := \{\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) : A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}, \text{ y } (A \neq 0 \text{ o } B \neq 0 \text{ o } C \neq 0)\},$$

donde $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}$. Además, definamos

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_p &:= \{\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) : \mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \text{ es una parábola}\},\\
\mathscr{D}_e &:= \{\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) : \mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \text{ es una elipse}\},\\
\mathscr{D}_h &:= \{\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) : \mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \text{ es una hipérbola}\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomemos $J = \{p,e,h\}$. Así, el problema, planteado de manera formal, es:

1. Determinar si $\{\mathscr{D}_i\}_{i \in J}$ es una clasificación de $\mathscr{D}$.
2. Dados $A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R}$, donde por lo menos uno de los valores de A, B y C es diferente de 0, determinar un procedimiento efectivo para identificar para qué $i \in J$, se cumple que $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_i$.

4. Aplicación de la metodología

4.1. Visualización de casos particulares conocidos

Dado que, en casos particulares, el conjunto $\mathscr{C}$, definido en (2), representa una figura cónica, empezaremos asumiendo el conocimiento de la forma estándar de la ecuación de estas, es decir:

- **Parábola** (elementos de $\mathscr{D}_p$), para $a,h,k \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$:

$$(x-h)^2 = a(y-k),$$

$$(y-k)^2 = a(x-h).$$

- **Elipse** (elementos de $\mathscr{D}_e$), para $a,b,h,k \in \mathbb{R}$ con $ab \neq 0$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

- **Hipérbola** (elementos de $\mathscr{D}_h$), para $a,b,h,k \in \mathbb{R}$ con $ab \neq 0$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$$

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

4.2. *Visualización de casos particulares no deseados*

Ahora, se plantea la pregunta si la ecuación general (1) siempre representa uno de estos tres casos. Es decir, se plantea si $\mathscr{D}_c$ es diferente del vacío.

El paso natural es buscar casos en los que el conjunto $\mathscr{C}$ no represente una cónica. Al ser esta una clasificación de conjuntos, empezaremos buscando un caso trivial, es decir, cuando este conjunto es igual al vacío. Un ejemplo de este caso es cuando la ecuación que lo define está dada por

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

En general, el conjunto sería vacío en el caso que la ecuación tenga la forma

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + c^2 = 0,$$

con $h, k, c \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$, dado que la cantidad de la izquierda es un número estricto positivo. Basándose en la misma idea, las ecuaciones

$$(x-h)^2 + c^2 = 0 \quad \text{y} \quad (y-k)^2 + c^2 = 0,$$

con $h, k, c \in \mathbb{R}$ y $c \neq 0$, también generan un conjunto vacío. Con esto, hemos obtenido una primera caracterización de la ecuación.

Ahora, notemos que estamos excluyendo el caso $c = 0$. Consideremos este caso, es decir, la ecuación

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 0,$$

al tener en el lado izquierdo de la igualdad la suma de cuadrados, se tiene que esta ecuación es equivalente a

$$(x-h)^2 = 0 \quad \text{y} \quad (y-k)^2 = 0,$$

es decir, $x = h$ y $y = k$, con lo cual el conjunto $\mathscr{C}$ estaría formado por un solo elemento.

Con esta misma idea, podemos seguir analizando casos particulares, similares a los presentados, es decir, casos de la ecuación

$$a(x-h)^2 + b(y-k)^2 + c = 0,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Así, podemos tener la siguiente caracterización:

- **Conjunto vacío**, para $h,k,c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + c^2 = 0$$
$$(x-h)^2 + c^2 = 0$$
$$(y-k)^2 + c^2 = 0$$

- **Unitario**, para $h,k \in \mathbb{R}$:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 0.$$

- **Una recta**, para $h,k \in \mathbb{R}$:

$$(x-h)^2 = 0$$
$$(y-k)^2 = 0$$

- **Dos rectas paralelas**, para $h,k,c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$:

$$(x-h)^2 - c^2 = 0$$
$$(y-k)^2 - c^2 = 0$$

- **Dos rectas concurrentes**, para $h,k,a,b \in \mathbb{R}$ con $ab \neq 0$:

$$a^2(x-h)^2 - b^2(y-k)^2 = 0$$

Con estos, se tiene que $\mathscr{D}_c$ es diferente del vacío.

Dado que, el objetivo es clasificar la ecuación general en uno de los tres tipos de cónicas y estas ecuaciones no representan una cónica, diremos que la ecuación (1) es *degenerada* si produce uno de los conjuntos expuestos en el párrafo anterior. Es decir, diremos que una ecuación es degenerada si el conjunto asociado es elemento de $\mathscr{D}_c$.

4.3. Generalización de casos particulares no deseados

Dado que, el objetivo es clasificar la ecuación general en uno de los tres tipos de cónicas, los casos no deseados presentados en la subsección anterior serán excluidos del estudio. Puesto que estas ecuaciones no representan una cónica, diremos que la ecuación (1) es *degenerada* si produce uno de los conjuntos expuestos en la subsección anterior. Es decir, diremos que una ecuación es degenerada si el conjunto asociado es elemento de $\mathscr{D}_c$.

4.4. *Establecimiento de analogías en casos particulares*

Basados en lo obtenido hasta el momento, podemos observar que tenemos caracterizaciones de la ecuación general cuando esta se encuentra expresada como suma de cuadrados, es decir, vemos identificación de patrones en los casos ya conocidos y en casos no deseados. Por lo tanto, el paso natural será tomar la ecuación general y mediante completación de cuadrados, encasillarla en uno de lo casos presentados.

4.5. *Determinación de condiciones suficientes de pertenencia, bajo restricciones*

A más de lo expuesto en la subsección precedente, podemos notar que en ninguna de las expresiones anteriores aparece en la ecuación el término xy, lo cual es necesario para poder realizar la completación de cuadrados. Así, la primera restricción para realizar nuestra clasificación es suponer $B = 0$ y proceder a completar los cuadrados.

Para iniciar el estudio de este caso, abordaremos un subcaso más simple, esto es, consideremos que $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambos, así, solamente una de sus variables tendrá un cuadrado y se asemejará a la ecuación de una parábola. Para fines didácticos, supongamos que $A \neq 0$ y $C = 0$, con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} Ax^2 + Dx + Ey + F &= A\left(x^2 + \tfrac{D}{A}x + \tfrac{D^2}{4A^2}\right) - \tfrac{D^2}{4A} + Ey + F \\ &= A\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 + Ey + \left(F - \tfrac{D^2}{4A}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (1), en este caso, puede adoptar la forma

$$A\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 + Ey + \left(F - \tfrac{D^2}{4A}\right) = 0.$$

Ahora, hay dos casos:

- Si $E = 0$, entonces, la ecuación es equivalente a

  $$\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 + \left(\tfrac{F}{A} - \tfrac{D^2}{4A^2}\right) = 0,$$

  la cual representa un caso degenerado que puede ser el conjunto vacío, una recta o dos rectas paralelas.
- Si $E \neq 0$, entonces, la ecuación es equivalente a

  $$\left(x + \tfrac{D}{2A}\right)^2 = \left(-\tfrac{E}{A}\right)\left(y + \tfrac{F}{E} - \tfrac{D^2}{4AE}\right).$$

  la cual representa una *parábola* que se abre hacía arriba o hacía abajo, dependiendo de si $\frac{E}{A} < 0$ o si $\frac{E}{A} > 0$, respectivamente.

Podemos apreciar que en el caso $A = 0$ y $C \neq 0$, bajo el mismo análisis anterior, vamos a obtener que la ecuación representa un caso degenerado o una *parábola* horizontal.

Así, hemos obtenido el siguiente resultado:

Lema 4.1 *Si $B = 0$, $E \neq 0$, y $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambos la ecuación* (1) *representa una parábola, es decir,*

$$\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_p$$

si no es un caso degenerado y $AC = 0$.

Ahora, vamos a continuar con el subcaso de que A y C son diferentes de 0, es decir, $AC \neq 0$. Con esto, procedemos a completar ambos cuadrados, así, se tiene que

$$\begin{aligned} Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F &= A\left(x^2+\tfrac{D}{A}x+\tfrac{D^2}{4A^2}\right)-\tfrac{D^2}{4A}+C\left(y^2+\tfrac{E}{C}y+\tfrac{E^2}{4C^2}\right)-\tfrac{E^2}{4C}+F \\ &= A\left(x+\tfrac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\tfrac{E}{2C}\right)^2-\tfrac{D^2}{4A}-\tfrac{E^2}{4C}+F. \end{aligned}$$

Así, la ecuación (1) obtiene la forma

$$A\left(x+\tfrac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\tfrac{E}{2C}\right)^2=r,$$

donde $r = \frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F$. De la ecuación anterior, surgen dos casos de interés:

- Cuando $r = 0$, obtenemos que $\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}=F$ y

  $$A\left(x+\tfrac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\tfrac{E}{2C}\right)^2=0,$$

  esta ecuación entra en los casos degenerados de un unitario o dos rectas paralelas, teniendo que, si A y C tienen el mismo signo; es decir, si $AC > 0$, entonces el único valor que cumple la ecuación es

  $$x=-\tfrac{D}{2A} \quad \text{y} \quad y=-\tfrac{E}{2C}.$$

  Mientras que si A y C tienen diferente signo; es decir, si $AC < 0$, entonces se tiene el caso de dos rectas concurrentes. En efecto, sin pérdida de generalidad, supongamos que $A > 0$ y $C < 0$, entonces la ecuación es equivalente a

  $$A\left(x+\tfrac{D}{2A}\right)^2=-C\left(y+\tfrac{E}{2C}\right)^2,$$

  la cual, a su vez, equivale a

  $$\sqrt{A}\left(x+\tfrac{D}{2A}\right)=\sqrt{-C}\left(y+\tfrac{E}{2C}\right)$$

  o

  $$\sqrt{A}\left(x+\tfrac{D}{2A}\right)=-\sqrt{-C}\left(y+\tfrac{E}{2C}\right),$$

  las cuales representan dichas rectas.

- Cuando $r \neq 0$, obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{r}{A}} + \frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{r}{C}} = 1. \tag{3}$$

De esta última ecuación, podemos extraer las siguientes conclusiones:

* Si $\frac{r}{A} > 0$ y $\frac{r}{C} > 0$, entonces la ecuación (3) representa una *elipse* trasladada de centro $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$; y cuyos semiejes son $\sqrt{\frac{r}{A}}$ y $\sqrt{\frac{r}{C}}$.
* Si $\frac{r}{A} \cdot \frac{r}{C} = \frac{r^2}{AC} < 0$; es decir, si $AC < 0$, entonces la ecuación (3) representa una *hipérbola* trasladada de centro $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$; y con ejes $\sqrt{\frac{r}{A}}$ y $\sqrt{\frac{r}{C}}$.
* Si $\frac{r}{A} < 0$ y $\frac{r}{C} < 0$ se tiene un caso degenerado cuya representación es el conjunto vacío.

Con este análisis, hemos obtenido el siguiente resultado:

Lema 4.2 *Suponga que la ecuación* (1) *no es degenerada,* $B = 0$ *y* $AC \neq 0$*. Si* A *y* C *tienen el mismo signo, la ecuación* (1) *representa una elipse y si* A *y* C *tienen signos diferentes, la ecuación* (1) *representa una hipérbola. Es decir,*

$$\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_e$$

si no es un caso degenerado y $AC > 0$ *y*

$$\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_h$$

si no es un caso degenerado y $AC < 0$.

Teorema 4.3 *Si la ecuación* (1)*, con* $B = 0$*, no es degenerada, entonces se tiene la siguiente clasificación:*

Condición	*Representación*
$AC > 0$	*Elipse*
$AC = 0$	*Parábola*
$AC < 0$	*Hipérbola*

Es decir, si $B = 0$ *y* $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F)$ *no es un caso degenerado, entonces*

- $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_e$ *si* $AB > 0$*;*
- $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_p$ *si* $AB = 0$*; y*
- $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_h$ *si* $AB < 0$.

Con esto, hemos obtenido un procedimiento efectivo que permite identificar el conjunto $\mathscr{D}_i$, con $i \in J$, al cual pertenezca un elemento dado de $\mathscr{D}$, que no esté en $\mathscr{D}_c$, bajo la restricción adicional de que B sea igual a 0.

4.6. Generalización de condiciones necesarias y suficientes de pertenencia

En la subsección anterior, obtuvimos la clasificación completa de la ecuación (1) cuando $B = 0$. Ahora, surge la pregunta de si podemos utilizar esos resultados en el caso general y la respuesta es afirmativa. Así, podemos generalizar las condiciones mediante un cambio de variables adecuado para transformar a la ecuación (1) en una equivalente, en el sentido que el conjunto representado conserva su forma, pero que el coeficiente de xy sea 0.

Esto se lo puede obtener mediante una rotación en los ejes coordenados. El siguiente lema nos permite determinar las coordenadas de un punto del plano, luego de realizar una rotación de los ejes coordenados, en función de las coordenadas originales del mismo.

Lema 4.4 *Sean $P = (P_x, P_y) \in \mathbb{R}^2$ y α un ángulo tal que $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Si $(P_{\tilde{x}}, P_{\tilde{y}})$ son las nuevas coordenadas del punto P luego de una rotación en el sentido antihorario de un ángulo α, entonces*

$$P_{\tilde{x}} = P_x \cos(\alpha) + P_y \operatorname{sen}(\alpha) \qquad y \qquad P_{\tilde{y}} = P_y \cos(\alpha) - P_x \operatorname{sen}(\alpha).$$

Es importante notar que el lema anterior nos permite, dadas P_x y P_y, calcular $P_{\tilde{x}}$ y $P_{\tilde{y}}$. Pero si conocemos $P_{\tilde{x}}$ y $P_{\tilde{y}}$, también podemos calcular P_x y P_y. En efecto, basta considerar el ángulo de rotación $-\alpha$, así:

$$P_x = P_{\tilde{x}} \cos(-\alpha) + P_{\tilde{y}} \operatorname{sen}(-\alpha) = P_{\tilde{x}} \cos(\alpha) - P_{\tilde{y}} \operatorname{sen}(\alpha);$$

y

$$P_y = P_{\tilde{y}} \cos(-\alpha) - P_{\tilde{x}} \operatorname{sen}(-\alpha) = P_{\tilde{x}} \operatorname{sen}(\alpha) + P_{\tilde{y}} \cos(\alpha).$$

Por otro lado, dado que los resultados del Teorema 4.3 dependen solo de la multiplicación de los coeficientes de x^2 y y^2, en el caso general, vamos a utilizar un cambio de variable (rotación) de la forma

$$x = \tilde{x}\cos(\alpha) - \tilde{y}\operatorname{sen}(\alpha) \quad \text{y} \quad y = \tilde{x}\operatorname{sen}(\alpha) + \tilde{y}\cos(\alpha) \tag{4}$$

que elimine el término $\tilde{x}\tilde{y}$ y después multiplicar los nuevos coeficientes cuadráticos; es decir, la multiplicación de los coeficientes $\tilde{x}^2$ y $\tilde{y}^2$ para así utilizar el resultado anterior.

4.6.1. Cálculo de los coeficientes

Consideremos la ecuación general (1):

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $B \neq 0$. Con esto, vamos a utilizar el Lema 4.4 para determinar la rotación adecuada de los ejes que cumpla que el coeficiente del término $\tilde{x}\tilde{y}$ sea nulo. Así, enfocándonos únicamente en los términos cuadráticos de la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} Ax^2+Bxy+Cy^2 &= A(\tilde{x}\cos(\alpha)-\tilde{y}\operatorname{sen}(\alpha))^2 \\ &\quad +B(\tilde{x}\cos(\alpha)-\tilde{y}\operatorname{sen}(\alpha))(\tilde{x}\operatorname{sen}(\alpha)+\tilde{y}\cos(\alpha)) \\ &\quad +C(\tilde{x}\operatorname{sen}(\alpha)+\tilde{y}\cos(\alpha))^2 \\ &= \big(A\cos^2(\alpha)+B\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)+C\operatorname{sen}^2(\alpha)\big)\tilde{x}^2 \\ &\quad +\big(-2A\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)+B(\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha))+2C\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)\big)\tilde{x}\tilde{y} \\ &\quad +\big(A\operatorname{sen}^2(\alpha)-B\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)+C\cos^2(\alpha)\big)\tilde{y}^2 \end{aligned}$$

Así, se tiene que el coeficiente del término $\tilde{x}\tilde{y}$ es

$$2(C-A)\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)+B(\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)).$$

Ahora, procedemos a igualar este coeficiente a 0 para obtener el ángulo adecuado, así, se tiene que

$$(A-C)\operatorname{sen}(2\alpha)=B\cos(2\alpha). \tag{5}$$

Para la resolución de esta ecuación, consideremos los siguientes dos casos:

- Si $\cos(2\alpha)\neq 0$, entonces $C\neq A$ y por lo tanto, se tiene que

  $$\tan(2\alpha)=\tfrac{B}{A-C},$$

  con esto, el ángulo buscado es

  $$\alpha=\frac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{B}{A-C}\right).$$

  Así, se tiene que

  $$\operatorname{sen}(2\alpha)=\tfrac{B}{d} \quad \text{y} \quad \cos(2\alpha)=\tfrac{A-C}{d},$$

  donde

  $$d:=\pm\sqrt{B^2+(C-A)^2}.$$

  Por lo tanto, el coeficiente de $\tilde{x}^2$ es

  $$\begin{aligned} A\cos^2(\alpha)+B\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)+C\operatorname{sen}^2(\alpha) &= A\cdot\tfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}+B\cdot\tfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}+C\cdot\tfrac{1-\cos(2\alpha)}{2} \\ &= \tfrac{1}{2d}\big(A(d+A-C)+B^2+C(d-A+C)\big) \\ &= \tfrac{1}{2d}\left[d(A+C)+\big(B^2+(A-C)^2\big)\right], \end{aligned}$$

  y el coeficiente de $\tilde{y}^2$ es

  $$\begin{aligned} A\operatorname{sen}^2(\alpha)-B\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)+C\cos^2(\alpha) &= A\cdot\tfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}-B\cdot\tfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}+C\cdot\tfrac{1+\cos(2\alpha)}{2} \\ &= \tfrac{1}{2d}\big(A(d-A+C)-B^2+C(d+A-C)\big) \end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{2d}\left[d(A+C)-\left(B^2+(A-C)^2\right)\right].$$

Finalmente, calculemos la multiplicación de los coeficientes de $\tilde{x}^2$ y de $\tilde{y}^2$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2d}\left[d(A+C)+\left(B^2+(A-C)^2\right)\right]\cdot\tfrac{1}{2d}\left[d(A+C)-\left(B^2+(A-C)^2\right)\right]&\\
=\tfrac{1}{4d^2}\left[d^2(A+C)^2-\left(B^2+(A-C)^2\right)^2\right]&\\
=\tfrac{1}{4}\left[(A+C)^2-\left(B^2+(A-C)^2\right)\right]&\\
=\tfrac{1}{4}(4AC-B^2).&
\end{aligned}$$

- Ahora, si $\cos(2\alpha)=0$, entonces

  $$\alpha=\tfrac{\pi}{4}\quad \text{o}\quad \alpha=\tfrac{3\pi}{4}.$$

  Con esto, tenemos que

  $$\cos(\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)=\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

  Así, dado que $\operatorname{sen}(2\alpha)\neq 0$, de (5), tenemos que estamos en el caso que $A=C$. De aquí, se tiene que los coeficientes de $\tilde{x}^2$ es

  $$\begin{aligned}
  A\cos^2(\alpha)+B\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)+C\operatorname{sen}^2(\alpha)&=A\cdot\tfrac{1}{2}+B\cdot\tfrac{1}{2}+A\cdot\tfrac{1}{2}\\
  &=\tfrac{1}{2}\left(2A+B\right)
  \end{aligned}$$

  y el coeficiente de $\tilde{y}^2$ es

  $$\begin{aligned}
  A\operatorname{sen}^2(\alpha)-B\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)+C\cos^2(\alpha)&=A\cdot\tfrac{1}{2}-B\cdot\tfrac{1}{2}+A\cdot\tfrac{1}{2}\\
  &=\tfrac{1}{2}\left(2A-B\right).
  \end{aligned}$$

  Finalmente, en este segundo caso, calculemos la multiplicación de los coeficientes de $\tilde{x}^2$ y de $\tilde{y}^2$:

  $$\begin{aligned}
  \tfrac{1}{2}\left(2A+B\right)\cdot\tfrac{1}{2}\left(2A-B\right)&=\tfrac{1}{4}\left(4A^2-B^2\right)\\
  &=\tfrac{1}{4}\left(4AC-B^2\right).
  \end{aligned}$$

De este desarrollo, tenemos que en ambos casos se ha llegado a la conclusión de que la multiplicación de los coeficientes de $\tilde{x}^2$ y $\tilde{y}^2$ es

$$\tfrac{1}{4}\left(4AC-B^2\right).$$

Con estos resultados podemos enunciar y demostrar el teorema clave de este artículo:

Teorema 4.5 *Si la ecuación* (1) *no es degenerada, entonces se tiene la siguiente clasificación:*

Condición	*Representación*
$4AC > B^2$	*Elipse*
$4AC = B^2$	*Parábola*
$4AC < B^2$	*Hipérbola*

Es decir, si $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F)$ *no es un caso degenerado, entonces*

- $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_p$ *si* $4AC = B^2$*;*
- $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_e$ *si* $4AC > B^2$*; y*
- $\mathscr{C}(A,B,C,D,E,F) \in \mathscr{D}_h$ *si* $4AC < B^2$.

Demostración. Supongamos que la ecuación (1) no es degenerada. Por el análisis anterior, obtenemos que la multiplicación de los coeficientes cuadráticos luego de aplicar una rotación que anule el coeficiente del término mixto es $\frac{1}{4}\left(4AC - B^2\right)$. Por el Teorema 4.3, ya que el término mixto es 0, podemos clasificar a las representaciones de la siguiente manera:

Condición	Representación
$\frac{1}{4}\left(4AC - B^2\right) > 0$	Elipse
$\frac{1}{4}\left(4AC - B^2\right) = 0$	Parábola
$\frac{1}{4}\left(4AC - B^2\right) < 0$	Hipérbola

Al simplificar las expresiones anteriores obtenemos exactamente lo que queremos demostrar.

Con esto, se ha generalizado los resultados del paso anterior, generando un procedimiento efectivo para la determinación de qué cónica representa una ecuación cuadrática de dos variables no degenerada dada. Es decir, se ha resuelto el problema de clasificación.

5. Conclusiones

Una metodología adecuada al abordar la clasificación de conjuntos, como se ha hecho en este artículo, es empezar analizando casos conocidos (parábola, elipse, hipérbola) y casos triviales (casos degenerados); a partir de estos, encontrar una similitud en forma (completación de cuadrados) para poder generalizar las formas ya conocidas y triviales. En este proceso, se origina naturalmente condiciones necesarias ($B = 0$) para obtener esta generalización; con esto, por similitud de forma, se obtiene una clasificación más general. Finalmente, se buscan técnicas para eliminar las condiciones impuestas (rotaciones para eliminar la restricción $B = 0$) y conseguir una clasificación general.

Como se pudo observar, esta metodología es fácilmente tratable, ejemplificable y comprensible para alumnos de primeros años de educación superior en carreras con componente matemático amplio (ingeniería y ciencias), dando lugar a una aplicación de saberes matemáticos en problemas abstractos; dando así una aplicación de la Matemática en sí misma.

Instamos a los profesores de primeros años de educación superior introducir este estudio al finalizar el aprendizaje de Geometría Analítica con el objetivo de mostrar a los estudiantes un uso conceptual de los contenidos aprendidos.

Referencias

1. Aschbacher, M. The Status of the Classification of the Finite Simple Groups. *Notices of the American Mathematical Society 51*, 5 (2004), 736–740.
2. Cederberg, J. *A Course in Modern Geometries*. Springer-Verlag, Estados Unidos, 2001.
3. Faires, D., and DeFranza, J. *PreCalculus*. Cengage Learning, Estados Unidos, 2012.
4. Lehmann, C. *Geometría Analítica*. Limusa S.A., México, 1989.
5. Ministerio de Educación *Curriculo de EGB y BGU, Matemática*. Ecuador, 2016.
6. Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. Springer-Verlag, New York, 1997.
7. Ramírez-Galarza, A. *Geometría Analítica*. Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2011.
8. Vaisman, I. *Analytical Geometry*. World Scientific Publishing Company, Estados Unidos, 1997.