

ANÁLISIS DINAMICO DEL PIB CONSIDERANDO TENDENCIA

Guerrero Fernando¹

Resumen. *El presente trabajo presenta un modelo dinámico lineal con tendencia para analizar series económicas. Este modelo permite explicar cuantitativamente conceptos cualitativos de equilibrio y estabilidad de la dinámica del sistema. La tendencia incluida en el modelo es producto de consideraciones de la dinámica causa-efecto y de expectativas económicas acerca del crecimiento. Finalmente el uso del modelo se ilustra analizando el PIB del Ecuador.*

Palabras Claves: Diagrama de fase, dinámica económica compleja, PIB, sistemas dinámicos, tendencia.

1. INTRODUCCIÓN

La aplicación reciente de los sistemas dinámicos a la economía, a dado lugar a un nuevo campo de investigación denominado: dinámica económica compleja. Este nuevo campo replantea el enfoque de los sistemas económicos respecto a las perturbaciones internas y externas.

2. SISTEMAS DINAMICOS

Se considerara que en el proceso de la variable el futuro cercano x_{n+j} esta determinado por el proceso actual mediante factores endógenos determinísticos $f(x_n)$ y por factores exógenos aleatorios ζ_n . Se obtiene la siguiente formula dinámica del proceso:

$$x_{n+1} = f(x_n) + \zeta_n \quad (1)$$

Suponiendo el proceso lo suficientemente suave, para linealizarlo localmente alrededor de un punto x , la formula (1) se rescribe de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = f(x) - xf'(x) + f'(x)x_n + [o(x_n - x) + \zeta_n]$$

Esto lleva a aproximar el proceso anterior mediante el siguiente modelo lineal:

$$x_{n+1} = \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \varepsilon_n \quad (2),$$

donde α_1 determina la tasa de variación del proceso debido a los factores endógenos, ε_n es una variable aleatoria que recoge las perturbaciones no lineales de los factores endógenos y los ruidos debido a los factores exógenos.

Aquí un momento de reflexión: es más factible suponer que en el sistema (1) la variable ζ_n sigue una distribución normal, pero no es lo mismo para la variable ε_n , ya que esta incluye perturbaciones endógenas no lineales. Las perturbaciones debido a la no linealidad no necesariamente se comportan como un ruido normal; entonces hay una mezcla de un determinismo endógeno no lineal y una aleatoriedad exógena; por lo cual en el sistema (2) la variable ε_n no es, en un sentido filosófico, ni totalmente aleatoria ni totalmente determinística.

Si en el modelo (1) consideremos que no existe perturbaciones y la dinámica del proceso solo se debe a factores endógenos se tiene el modelo ideal:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

El proceso alcanzaría el equilibrio, si la dinámica debido a los factores endógenos mantendría el sistema en el mismo sitio, es decir, si el equilibrio se alcanzara en un punto x^* este se mantendría fijo por acción de los factores endógenos, es decir:

$$x^* = f(x^*) \quad (3).$$

Considerando esto para el modelo (2) se tiene que si $\alpha_1 \neq 1$, entonces existe el punto de equilibrio x^* ; y está determinado por:

$$x^* = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad (4).$$

Si $\alpha_1 = 1$ entonces no estará definido el punto de equilibrio, pero si se reemplaza directamente en (2), y se considera la nueva variable ε'_n , como $\varepsilon'_n = \varepsilon_n + \alpha_0$, se tiene:

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon'_n,$$

es decir el proceso está en una dinámica pseudoequilibrada la misma que se verá influida

¹ Fernando Guerrero, M.Sc., Profesor de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL); (e-mail: alex_fernad@yahoo.com)

por las perturbaciones no lineales de los factores endógenos, los ruidos debido a los factores exógenos además de una constante de nivel.

En el resto del trabajo se supone, a menos que se especifique lo contrario, que $\alpha_j \neq 1$ y que ε_n sigue una distribución normal centrada con varianza σ_ε^2 : $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Estas suposiciones indican que se van a considerar procesos no seudoequilibrados, en los cuales las perturbaciones se deben principalmente a los ruidos producidos por los factores endógenos y las perturbaciones no lineales de los factores endógenos, los mismos que tienden a equilibrarse.

Considerando que el proceso del sistema (2) comienza en un estado inicial x_0 , el proceso se puede describir de la siguiente forma explícita:

$$x_n = x^* + (x_0 - x^*) \alpha_j^n + \varepsilon_n \quad (5),$$

donde $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, con

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1 - \alpha_j^{2n}}{1 - \alpha_j^2} \sigma_\varepsilon^2$$

La ecuación (5) esta expresando que en el proceso las desviaciones iniciales del punto de equilibrio ($x_0 - x^*$) crecen o decrecen en forma exponencial, debido a las fuerzas endógenas del sistema.

Es de observar que si el proceso alcanza el punto de equilibrio en x_n , es decir: $x_n = x^*$, las desviaciones del proceso del punto de equilibrio son debido a las perturbaciones generadas por ε_n , y no, como se pensaría, por ε_n ; es decir:

$$x_{n+1} - x^* = \varepsilon_n$$

Considerando que siempre hay desviaciones debido a las perturbaciones aleatorias, sería de interés determinar como se ve afectado el equilibrio por estas perturbaciones.

Así, si en el modelo (1) consideremos que el punto de equilibrio se alcanza en x_n , es decir: $x_n = x^*$, tendríamos que mientras los factores endógenos mantendrían este estado en el tiempo, los factores exógenos de hecho están perturbando este equilibrio.

Suponiendo el proceso lo suficientemente suave, para linealizarlo localmente alrededor de un punto x^* , y despreciando las perturbaciones se tiene:

$$x_{n+1} - x^* = f'(x^*) [x_n - x^*],$$

es decir que las desviaciones del punto de equilibrio son localmente amplificadas o atenuadas por la variación del proceso en x^* , $f'(x^*)$, debido a los factores endógenos. Así se tiene que los factores endógenos tienden a atenuar el efecto de los factores exógenos si

$|f'(x^*)| < 1$, y tienden a amplificar dicho efecto si $|f'(x^*)| > 1$.

Por esto se dice que el punto de equilibrio del sistema (1) es estable si $|f'(x^*)| < 1$, y se dice que es inestable si $|f'(x^*)| > 1$.

Aplicando esto al sistema (2) se tendría que el punto de equilibrio es estable si $|\alpha_j| < 1$ y es inestable si $|\alpha_j| > 1$. Es de notar que en el sistema (2), la estabilidad no depende en realidad del punto de equilibrio, debido a que es un sistema lineal.

Si el punto de equilibrio es estable, entonces para n lo suficientemente grande se tendría que:

$$x_n \approx x^* + \varepsilon \quad (6),$$

donde $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, con

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{1 - \alpha_j^2} \sigma_\varepsilon^2$$

La ecuación (6) esta expresando que en un proceso estable, desde el punto de vista del equilibrio, se esperaría que para un tiempo lo suficientemente largo los factores endógenos llevan al sistema a una región cercana al punto de equilibrio.

La convicción de este comportamiento hacia una región de equilibrio, esta sujeta a la suposición de que los factores endógenos atenúan de manera relevante las perturbaciones debidas a los factores exógenos. Por otra parte la rapidez de la convergencia se vería influenciada por la forma en que tan fuerte es la atenuación.

Para poder medir estas características cualitativas en forma cuantitativa y a fin de poder comparar comportamientos estables e inestables en una escala apropiada, es que se define el exponente de Lyapunov, λ , del proceso del sistema (1), como:

$$\lambda = \ln |f'(x^*)| \quad (7).$$

El exponente de Lyapunov λ nos permite clasificar el proceso como estable si $\lambda > 0$ y como inestable si $\lambda < 0$. Además de ello nos permite comparar la fuerza de la dinamia entre dos procesos diferentes, no necesariamente los dos estables o inestables.

Aplicando esto al sistema (2) se tendría que:

$$\lambda = \ln |\alpha_j| \quad (8).$$

3. ANÁLISIS DINAMICO DEL PIB MEDIANTE DIAGRAMAS DE FASE

Los diagramas de fase son una gran herramienta usada en los sistemas dinámicos, ya que permiten observar el comportamiento cualitativo estructural de un sistema. De igual forma estos diagramas al aplicarlos al estudio de variables macroeconómicas permiten observar un comportamiento cualitativo generalmente en un modelo lineal.

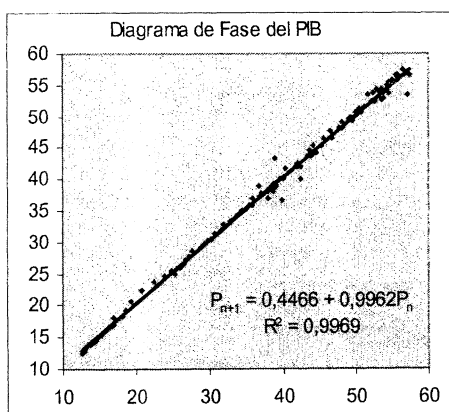
Generalmente en el sistema (1), se desconoce la forma como las fuerzas endógenas actúan en el proceso, solo se tiene una traza de las observaciones dada por los datos.

Con el fin de visualizar este comportamiento de estos modelos se suele graficar x_{n+1} vs x_n , esta herramienta se la conoce como diagrama de fase. Esta técnica grafica la dinámica del futuro cercano, x_{n+1} , explicada por un presente o pasado cercano, x_n ; debido a esto, uno de los diagramas de fase más usado es el de x_{n+1} vs x_n ; es decir del futuro cercano, x_{n+1} , explicado por el presente, x_n .

En general para variables económicas los diagramas de fase presentan un agrupamiento lineal, lo cual explica el uso de modelos del tipo (2).

Un ejemplo de esto es el siguiente diagrama de fase del PIB, en el cual se presenta el ajuste lineal al modelo (2), el ajuste hecho por el metodo de los minimos cuadrados es bueno ya que su potencia es de 0.9985:

Gráfico 1
Análisis dinámico del PIB considerando tendencia
Diagrama de Fase para el PIB



4. ANÁLISIS DINAMICO DEL PIB CONSIDERANDO TENDENCIA

Casi siempre las variables macroeconómicas presentan algún tipo de tendencia, generalmente lineal. Esta tendencia oculta el comportamiento

de la variable en si, ya que ejerce una gran inercia sobre la autocorrelación de las variables.

En general mientras mas diferente sea α_1 de 1, el comportamiento estable o inestable esta mas diferenciado. En los casos en los que $\alpha_1 \approx 1$, los comportamientos estables o inestables se pueden ver seriamente afectados por los shocks aleatorios.

Para ver este efecto consideremos en el modelo (2) que $\alpha_1 \approx 1$. Como α_1 se diferencia poco de 1, sea $h=1-\alpha_1$, luego (2) se puede reescribir en el siguiente modelo con tendencia lineal:

$$y_n = y_0 + n\alpha_0 + \kappa_n, \quad (9)$$

donde κ_n son las perturbaciones debido tanto a los shocks aleatorios, como a efectos no lineales de poca consideración.

Este hecho explicaría porque en general se tiene un coeficiente de autocorrelación cercano a 1 en variables que exhiben tendencia lineal, ya que dichas variables la tendencia seria una propiedad endógena del proceso.

Una interrogante respecto a la explicación anterior relacionada con la causalidad que se puede plantear es: la tendencia es consecuencia o es una causa de que $\alpha_1 \approx 1$?

A fin de despejar esta interrogante, hagamos una inversión de los resultados de tendencia: examinemos de entrada un modelo dinámico con tendencia aditiva. Para ello consideremos el siguiente modelo aditivo:

$$y_n = x_n + T_n, \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \varepsilon_n, \\ T_{n+1} &= \tau_0 + T_n + \delta_n, \end{aligned}$$

donde x_n un proceso estable y donde ζ y δ son shocks aleatorios que se suponen normales y centrados.

Es de observar que T_n no tiene punto de equilibrio, y puede considerarse en cierto sentido que su coeficiente de variación es muy cercano a 1 lo que haría que exhibiese un fuerte comportamiento de tendencia lineal.

En el modelo (10) se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Var}[T_n] &= \sigma_0^2 + n\sigma_\delta^2, \\ E[T_n] &= \mu_0 + n\tau_0, \\ T^* &\text{ no existe,} \\ \rho_T &= [k^2/(N+k^2)]^{1/2N}, \end{aligned} \quad (16)$$

donde $k=\sigma_0/\sigma_\delta$ y $N+1$ es el numero total de datos temporales.

La determinación de las fórmulas respectivas para y_n es arduo y la formula final es un poco complicada, así que solo mostraremos una aproximación de p_y para valores grandes de N y valores de $\alpha_1 \approx 1$:

$$\rho_y \approx [\kappa^2/(N+\kappa^2)]^{1/2N}, \quad (17)$$

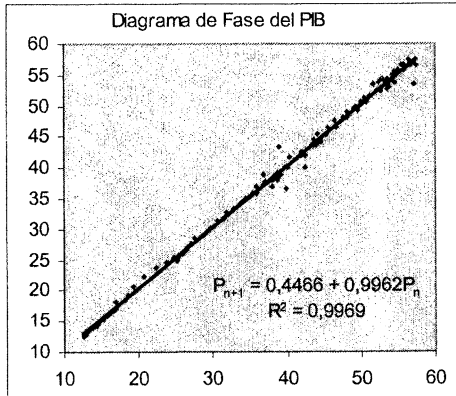
donde $\kappa^2 = \sigma_0^2/\sigma_\delta^2 + \sigma_\zeta^2/\sigma_\delta^2$ y $N+1$ es el numero total de datos temporales.

Para aplicar estos modelos con tendencia a variables y_n se pueden considerar los residuos como a las variables sin tendencia x_n . En estos casos es de esperarse que los residuos exhiban un tipo de autocorrelación $\rho \neq 0$ debido a su dinámica intrínseca.

Estas ideas se ilustran con el análisis de los datos trimestrales del PIB del Ecuador, desde el primer trimestre del año 1965 al segundo trimestre del año 2001.

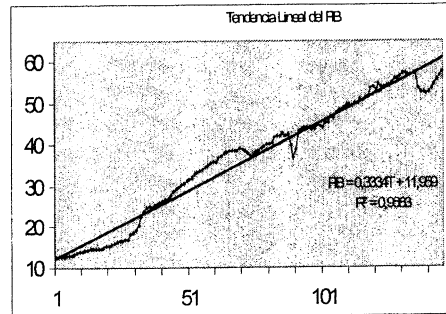
Primero ilustremos el diagrama de fase del modelo sin tendencia:

Gráfico 2
Análisis dinámico del PIB considerando tendencia
Diagrama de Fase para el PIB sin considerar tendencia



El ajuste lineal en el diagrama de fase indica que el modelo es débilmente estable $\lambda = -0.0038$, con un $\alpha = 0.9962$, el cual es muy cercano a 1, por lo cual se propone que el modelo se ve influenciado por una tendencia, escogiéndose por simplicidad una tendencia lineal, ilustrada en el siguiente gráfico.

Gráfico 3
Análisis dinámico del PIB considerando tendencia
Ajuste de Tendencia lineal para el PIB



El ajuste lineal hecho por el método de los mínimos cuadrados es bueno ya que su potencia es de 0.9840. Es de notar que para el modelo de ajuste del coeficiente de correlación no es importante los parámetros del ajuste de la tendencia lineal.

Para hacer el ajuste de acuerdo a la fórmula (16) y (17) se tiene $N=145$, considerando que la incertidumbre inicial σ_0 y el shock σ_δ se barren mutuamente se puede asumir que $0.25 \leq \kappa^2 \leq 4$ y $0.9376 \leq \kappa^2 \leq 4.6876$. Lo cual determina un valor de la autocorrelación teórica de la tendencia ρ_T de $0.9783 \leq \rho_T \leq 0.9876$, y un valor de la autocorrelación teórica del PIB ρ_P de $0.9881 \leq \rho_P \leq 0.9827$.

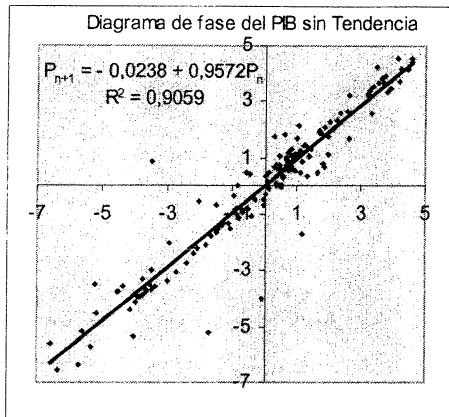
Comparando este ultimo valor con el valor experimental de la autocorrelación experimental del PIB ρ_{PIB} $\rho_{PIB} = 0.9962$; se tiene un error de menos del 2%.

Considerando esto se puede, quitar la tendencia lineal del PIB y trabajar con el PIB sin tendencia para obtener el análisis dinámico del PIB sin tendencia.

Para ello consideremos el diagrama de fase del PIB sin tendencia que se muestra en el siguiente gráfico:

Gráfico 4

Análisis dinámico del PIB considerando tendencia
Diagrama de Fase para el
PIB sin tendencia



El ajuste lineal en el diagrama de fase hecho por el método de los mínimos cuadrados es bueno ya que su potencia es de 0.9518, y se tiene que el modelo sin tendencia es débilmente estable $\lambda=-0.0438$, pero más estable que el modelo con tendencia $\lambda=-0.0038$. Así mismo se tiene para el modelo sin tendencia un $\alpha=0.9572$, el cual no es tan cercano a 1 como el modelo sin tendencia $\alpha=0.9962$.

5. CONCLUSIONES

Unas pocas conclusiones que se pueden sacar son del modelo dinámico del PIB son:

- 1 La tendencia posee gran inercia ($0.9783 \leq \rho_T \leq 0.9876$) con respecto a la autocorrelación del PIB ($\rho_{PIB}=0.9962$).
- 2 El número de datos elevado ($N=145$) explica la cercanía a 1 ($\rho_{PIB}=0.9962$) de la autocorrelación del PIB.
- 3 Quitando la tendencia al PIB el proceso se vuelve más estable ($\lambda=-0.0038 \rightarrow \lambda=-0.0438$).

Unas de las preguntas que podrían hacerse son:

1. Que sucede si se consideran modelos con tendencia exponenciales?
2. Que sucede si se considera modelos con tendencia lineal por regímenes?
3. Como se podrían estimar los estadísticos para este tipo de procesos en los cuales las condiciones de normalidad no se cumplen del todo?

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. BANCO CENTRAL DEL ECUADOR. (2003). "Anuarios Oficiales". Quito Ecuador.
2. RICHARD H. DAY (1998)., "Complex Economic Dynamics Vol I: An Introduction To Dynamical Systems and Market Mechanisms". MIT Press, Cambridge-Massachusetts.,