matemática: Una publicación del ICM – ESPOL
2003, Vol. 2, No. 1 Publicado: 2003-04-30

METODO DIRECTO DE RITZ PARA DETERMINAR EL MINIMO DE UN FUNCIONAL EN H_A

Rivadeneira M. Eduardo[1]

Resumen. *En este documento se presenta una formalización del Método de Ritz, en su aplicación a las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales.*

Palabras Claves: Método Directo de Ritz, Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, Solución generalizada, Espacio de Hilbert.

1. INTRODUCCIÓN

En la Física-Matemática se entiende por métodos variacionales, aquellos que permiten transformar el problema de integrar una ecuación diferencial en un equivalente problema variacional, esto es, la búsqueda de una función que le trasmite un valor extremo a una determinada integral.

Las bases teóricas de los métodos variacionales fueron establecidas en la primera mitad del siglo XX y en la segunda mitad fueron desarrolladas sus realizaciones numéricas gracias al avance de la informática.

Aquí vamos a considerar su aplicación a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Sea dada la ecuación $Au = f$ (1), definida en algún espacio de Hilbert H (H real) con norma $\|u\|_H = \|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$, con un operador simétrico positivamente definido A, tal que $\overline{D(A)} = H$, donde $D(A)$ es el dominio del operador A y es un lineal denso en H, con las propiedades:

$$(Au,v) = (u,Av) \forall u,v \in D(A) \qquad (2)$$

$(Au,u) \geq 0 \forall u \in D(A)$, donde

$$(Au,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \qquad (3).$$

Entonces, el funcional cuadrático

$$F[u] = (Au,u) - 2(f,u) \qquad (4),$$

tiene un mínimo en el espacio Energético H_A y el elemento u_0 que minimiza $F[u]$ coincide con la solución de la ecuación (1) (la demostración formal de la ultima afirmación se encuentra en (1).

Por ejemplo si

$$Au = -\Delta u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \qquad (5),$$

donde A es el operador de Laplace, y con la condición que $D(A) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}$, donde Ω es una región acotada de R^n y tal que en (1), $f(x) \in L_2(\Omega)$, entonces el mínimo del funcional $F[u] = \int_\Omega \{(\text{grad}u)^2 - 2uf\} d\Omega$ nos da la solución del problema de Poisson: $-\Delta u = f$; $u|_{\partial\Omega} = 0$.

2. METODO DE RITZ

Sea A un operador positivamente definido en el lineal $D(A)$ en el espacio separable de Hilbert H y $f \in H$. Sea H_A un espacio de Hilbert con norma $\|u\|_A = (Au,u)^{\frac{1}{2}}$ (6) (la construcción formal de H_A puede verse en [1]). Veamos en H_A la base ortogonal contable

$$\{\varphi_i\}_{i=1}^{+\infty} \qquad (7).$$

Definición 1. Se llama solución generalizada de la ecuación $Au = f$ (1), al elemento $u_0 \in H_A$ que minimiza el funcional $F[u] = (Au,u) - 2(f,u)$ (4) en el espacio H_A, esto es, tal que $F[u_0] = \min_{u_0 \in H_A} F[u]$.

---

[1] *Eduardo Rivadeneira Molina, Profesor de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL); (e-mail: erivaden@goliat.espol.edu.ec)*

Tomemos un número entero positivo n, y vamos a buscar la aproximación u_n de u_0 en la forma

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \qquad (8),$$

donde a_k son constantes por el momento desconocidas y φ_k son elementos de (7).

Estas constantes se definen de la condición $F[u_n] = \min$, lo cual significa que entre todas las aproximaciones de la forma

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k \qquad (9),$$

donde b_k son cualesquiera números reales, el funcional F toma el valor mínimo con exactitud hasta la de la aproximación (8).

Introduzcamos v_n en (4),

$$F[v_n] = \left(A\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k , \sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k \right) - 2\left(f , \sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k \right) (10)$$

, dado que

$$(A\varphi_i, \varphi_j) b_i b_j = (A\varphi_j, \varphi_i) b_j b_i \ , i \neq j ,$$

entonces

$$\begin{aligned} F[v_n] &= (A\varphi_1,\varphi_1)b_1^2 + 2(A\varphi_1,\varphi_2)b_1b_2 + \ldots \\ &+ 2(A\varphi_1,\varphi_n)b_1b_n + (A\varphi_2,\varphi_2)b_2^2 + \ldots \\ &+ 2(A\varphi_2,\varphi_n)b_2b_n + \ldots \\ &+ (A\varphi_n,\varphi_n)b_n^2 - 2(f,\varphi_1)b_1 - \ldots \\ &- 2(f,\varphi_n)b_n \end{aligned} \qquad (11).$$

Los productos escalares $(A\varphi_i, \varphi_j)$, son números fijos que están definidos por los elementos de la base dada.

Determinemos

$$\left. \frac{\partial F[v_n]}{\partial b_j} \right|_{b_i = a_i,\, i=\overline{1,n}} = 0 , j = \overline{1,n} \qquad (12),$$

para establecer el punto mínimo de (11) en el punto $(a_1, \ldots, a_n)$. De aquí obtenemos el sistema

$$\begin{cases} (A\varphi_1,\varphi_1)a_1 + (A\varphi_1,\varphi_2)a_2 + \ldots + (A\varphi_1,\varphi_n)a_n = (f,\varphi_1) \\ (A\varphi_1,\varphi_2)a_1 + (A\varphi_2,\varphi_2)a_2 + \ldots + (A\varphi_2,\varphi_n)a_n = (f,\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A\varphi_1,\varphi_n)a_1 + (A\varphi_2,\varphi_n)a_2 + \ldots + (A\varphi_n,\varphi_n)a_n = (f,\varphi_n) \end{cases} \qquad (13)$$

el cual tiene solución única.

Por tanto hemos obtenido los valores de los números a_i , $i = \overline{1,n}$, esto es, hemos determinado $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$ (8).

3. CONCLUSIONES

1. En consecuencia de lo expuesto anteriormente tenemos el siguiente resultado: Teorema 1. Sea A un operador positivamente definido sobre el lineal $D(A)$, el cual es denso en el espacio separable de Hilbert H, y sea $f \in H$. Además, la sucesión $\{\varphi_i\}_{i=1}^{+\infty}$, forma una base ortogonal en H_A. Entonces, la sucesión de Ritz $\{u_n\}$, con constantes a_i , $i = \overline{1,n}$, definidas unívocamente por cada n fijo del sistema (13), converge a la solución generalizada u_0 de la ecuación $Au = f$ en el espacio H_A.Cabe mencionar de que del hecho de que $u_n \to u_0$ en H_A, no se sigue en general que $Au_n \to f$ en H.

2. Para la realización numérica es óptimo usar una base ortonormal, lo cual permite obtener mejores resultados, y así añadir a la simplicidad del método, mayor exactitud .

3. Para una mejor visualización de la necesidad de una mayor formalización de este método, se puede consultar el texto de Godunov [2], donde se explica la necesidad de condiciones de convergencia con un contraejemplo simple.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **BRUCKNER A. M., BRUCKNER J. B., THOMSON B. S.** (1997). *"Real Analysis"*, PRENTICE-HALL, New Jersey.

2. **GODUNOV S. K..** (1984) . *"Ecuaciones de la Física Matemática"*, Editorial MIR, Moscu.

3. **REKTORYS KAREL** (1980). *"Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering"*, Dr. Reidel Publishing Company, Prague.