2003, Vol. 1, No. 2 Publicado:2003-10-30

LAS MATEMATICAS SIMPLES DEL EQUILIBRIO GENERAL

Espinel Ramón.

Resumen: *El equilibrio general es un tema de gran importancia en la compresión de la teoría económica. Comúnmente es tratado en los textos de microeconomía, pero su manejo matemático es usualmente complejo y se lo deja a textos más o menos avanzados. Este artículo revisa la teoría del equilibrio general utilizando modelos matemáticos sencillos que demuestran con claridad como se obtiene el equilibrio y cual es su implicancia. Se introduce luego una distorsión en el mercado, ilustrada por un caso de monopolio, y se muestra el efecto en el desvío del equilibrio general y la consecuente pérdida de bienestar para la sociedad. Se revisan teorías para corregir esta situación, incluyendo las teorías de "second best" y se concluye en que, producida una desviación de las condiciones de competencia perfecta, los resultados obtenidos son de inferior calidad.*

Palabras Claves: Equilibrio, Hessiano Bordeado, Consumidor.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis del equilibrio general de la economía se desarrolla por lo común en los libros de texto de Microeconomía y el uso de las matemáticas para derivarlo se presenta de manera mas bien compleja en los trabajos mas avanzados. Son pocas las publicaciones que abordan el estudio de los modelos de equilibrio haciendo una presentación explícita de los efectos que tiene su existencia en el comportamiento de los agentes económicos. El trabajo mas conocido al respecto, tanto por su elegancia como por su profundidad, es el del Profesor Debreu (1959), pero está destinado a cursos avanzados de Economía y su comprensión no es fácil para estudiantes que están en niveles iniciales y aún medios.

El equilibrio general es esencia y resultado del paradigma neoclásico y resulta de manera directa e ineludible de la estricta aplicación del modelo de competencia perfecta. En general, deviene sencillo para quiénes estudian dicho modelo entender la forma en que se obtiene el resultado de equilibrio, el cual es asimilable a la misma forma en que se obtienen los equilibrios parciales, mercado por mercado. Esto es una directa consecuencia de la Ley de Walras (M. Blaug, 1974). Pero la sencillez del enunciado puede conducir a error si se la aplica de manera ligera; es necesario tener una comprensión clara de la manera en que interactúan los mercados, para poder afirmar las consecuencias de la aplicación de los conceptos del equilibrio general (Walsh y Gram, 1980).

Espinel Ramón, Ph. D., Profesor de Economía Agrícola en Ingeniería Agropecuaria de la Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la Producción. Profesor de Economía del Desarrollo en el Department of Food and Resource Economics de la Universidad de Florida en Gainesville; (e-mail: respinel@goliat.espol.edu.ec)

El desarrollo de los conceptos microeconómicos aplicados al análisis del comportamiento real de las empresas ha dado lugar al rápido avance de la subdivisión de la Teoría que se identifica como la Organización Industrial, también llamada Microeconomía Avanzada o incluso Organización y Regulación de Mercados. Textos intermedios como el de Carlton y Perloff (1994) y otros más avanzados, como el de Tirole (1998), plantean el estudio de la competencia perfecta como una forma de organización en la que las empresas actúan de una determinada manera, adaptándose o acoplándose a los requerimientos estrictos del modelo competitivo; los textos se esmeran en puntualizar los aspectos del modelo que usualmente se complican, o mas bien complican a las empresas y, a veces, invalidan su análisis. Pero la explicación de estos problemas se hace bastante compleja cuando se presenta el cuadro general de la economía, pues los efectos que se puede identificar con relativa facilidad en el nivel de los mercados individuales se vuelven poco claros cuando se toma a la economía en su conjunto, como lo expresan en la introducción metodológica al estudio del equilibrio general Mas-Colell y sus coautores (1995).

A estas dificultades que se encuentra el estudiante al adentrarse en la teoría que subyace a los modelos de equilibrio general se suma el hecho que los textos en español son escasos y, aún considerando que el idioma es uno de los obstáculos que debe vencer la formación científica, esto lo aleja todavía mas de la comprensión clara de un tema fundamental en la Teoría Económica.

Animado con el deseo de presentar de una manera sencilla pero rigurosa los planteamientos esenciales de la teoría del equilibrio general, en una línea apegada a la teoría Walrasiana del notas de clase para estudiantes de Organización Industrial y de Microeconomía Avanzada que he utilizado antes en la Escuela Superior Politécnica del Litoral y en la Universidad Católica de Guayaquil.

El análisis que se desarrolla a continuación parte de un sencillo modelo de maximización de utilidad del consumidor, el cual se generaliza a preferencias de la sociedad y se lo coteja a las decisiones de optimización de las empresas, para desarrollar entonces un análisis de frontera de posibilidades, mostrando como la competencia garantiza el resultado óptimo para la sociedad en su conjunto.

Luego se abandona el supuesto de competencia y se introduce la existencia de monopolio, para mostrar la distorsión que se genera y explicar cómo se pierde el resultado óptimo. La solución entonces se convierte en un posible segundo óptimo (**second best**), definido siguiendo a Lipsey y Lancaster (1957). El trabajo termina con una discusión del efecto que esto tiene sobre la sociedad, desde el punto de vista del bienestar.

2. EL EQUILIBRIO EN EL CONSUMO

Empezamos por definir las variables y establecer la notación para desarrollar un modelo de maximización de utilidad a nivel de los consumidores de una sociedad hipotética. Para simplificar el análisis, suponemos una economía con tan solo tres bienes de consumo: los bienes físicos X e Y, además de "ocio", definido éste como el total de horas de un período (por ejemplo, un día de 24 horas) menos L, el número de horas trabajadas por cada individuo.

Con este antecedente, definimos

x_i = cantidad de X consumida por el i_{avo} consumidor

y_i = cantidad de Y consumida por el i_{avo} consumidor

l_i = cantidad de horas trabajadas por el i_{avo} consumidor

Establecemos las condiciones

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i ;\ Y = \sum_{i=1}^{n} y_i ;\ \mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

Las preferencias de cada individuo pueden ser expresadas a través de una **función de utilidad** neoclásica,del tipo $U^i(x_i, y_i, l_i)$, $U^j(x_j, y_j, l_j)$,

mercado (Walras, 1874), he hecho uso de las

para el i_{avo} y j_{avo} consumidor respectivamente; de igual manera para cada uno de los individuos se podrá expresar una función de utilidad del mismo tipo.

Definimos la siguiente notación para las derivadas de las funciones de utilidad:

$$U_X = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U_{XX} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Asumimos que los correspondientes signos de las derivadas se ajustan a lo esperado:

$$U_X > 0;\ U_{XX} < 0;\ U_Y > 0;$$

$$U_{YY} < 0;\ U_L < 0;\ U_{LL} < 0;$$

Usando las definiciones establecidas, procedemos ahora a maximizar la utilidad del consumidor i_{avo} asumiendo que el nivel de utilidad de todos los demás consumidores, representados por el superíndice j, se mantiene constante; esto es:

$$\begin{aligned} \text{Max } & U^i = U^i(x_i, y_i, l_i) \\ \text{s.a. } & U^i = \overline{U}^j \ (= \text{un nivel constante}) \\ & \mathrm{X{=}x_i} + x_j \\ & Y = y_i + y_j \\ & L = l_i + l_j \\ & X \geq 0; Y \geq 0; L \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver el problema de maximización formamos una función de Lagrange:

$$\text{Max } \Omega = U^i(x_i, y_i, l_i) + \omega_1 \left[U^j(x_j, y_j, l_j) - \overline{U}^j \right] + \omega_2(X - x_i - x_j) + \omega_3(Y - y_i - y_j) + \omega_4(L - l_i - l_j)$$

(1)

Diferenciando con respecto a las cantidades consumidas de cada bien, obtenemos las condiciones de primer orden, o condiciones necesarias del problema de maximización:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_i} = U^i_X - \omega_2 = 0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial y_i} = U^i_Y - \omega_3 = 0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial l_i} = U^i_L - \omega_4 = 0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_j} = \omega_1 U^j_X - \omega_2 = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial y_j} = \omega_1 U^j_Y - \omega_3 = 0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial l_j} = \omega_1 U^j_L - \omega_4 = 0$$

Las ecuaciones (2), junto con las derivadas de la función con respecto a los multiplicadores $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, son las condiciones de primer orden requeridas para un máximo. Para las condiciones suficientes seguimos el procedimiento estándar de obtener el diferencial total de las condiciones de primer orden y ordenarlo para formar un **Hessiano bordeado**, al cual denotaremos, siguiendo los textos tradicionales, como $|\overline{H}|$ de orden 10 x 10 [al respecto se puede consultar Alpha C. Chiang (1974); para un texto más avanzado, que incluye una exposición teórica detallada, ver A. Takayama (1990)].

El Hessiano lo podemos expresar como

$$|\overline{H}| = \left|\begin{array}{c|c} A_{4x4} & B_{4x6} \\ \hline C_{6x4} & D_{6x6} \end{array}\right| \qquad (3)$$

Donde A es el determinante formado por las segundas derivadas con respecto a los multiplicadores

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (3.a)$$

B es el determinante que corresponde a las segundas derivadas de las restricciones con respecto a las variables de decisión $x_i, y_i, l_i, x_j, y_j, l_j$; C es el transpuesto de B: $C = B^T$. $B =$

$$\begin{vmatrix} U^j_X \frac{dx_j}{dx_i} & U^j_Y \frac{dy_j}{dy_i} & U^j_L \frac{dl_j}{dl_i} & U^j_X & U^j_Y & U^j_L \\ -1\frac{dx_j}{dx_i} & 0 & 0 & \frac{dx_i}{dx_j}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1\frac{dy_j}{dy_i} & 0 & 0 & \frac{dy_i}{dy_j}-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1\frac{dl_j}{dl_i} & 0 & 0 & \frac{dl_i}{dl_j}-1 \end{vmatrix}$$

(3.b)

Finalmente, D está formado por las segundas derivadas. $D =$

$$\begin{vmatrix} U^i_{XX} & U^i_{XY} & U^i_{XL} & U^i_{XX}\frac{dx_i}{dx_j} & U^i_{XY}\frac{dy_i}{dy_j} & U^i_{XL}\frac{dl_i}{dl_j} \\ U^i_{YX} & U^i_{YY} & U^i_{YL} & U^i_{YX}\frac{dx_i}{dx_j} & U^i_{YY}\frac{dy_i}{dy_j} & U^i_{YL}\frac{dl_i}{dl_j} \\ U^i_{LX} & U^i_{LY} & U^i_{LL} & U^i_{LX}\frac{dx_i}{dx_j} & U^i_{LY}\frac{dy_i}{dy_j} & U^i_{LL}\frac{dl_i}{dl_j} \\ U^j_{XX}\frac{dx_j}{dx_i} & U^j_{XY}\frac{dy_j}{dy_i} & U^j_{XL}\frac{dl_j}{dl_i} & U^j_{XX} & U^j_{XY} & U^j_{XL} \\ U^j_{YX}\frac{dx_j}{dx_i} & U^j_{YY}\frac{dy_j}{dy_i} & U^j_{YL}\frac{dl_j}{dl_i} & U^j_{YX} & U^j_{YY} & U^j_{YL} \\ U^j_{LX}\frac{dx_j}{dx_i} & U^j_{LY}\frac{dy_j}{dy_i} & U^j_{LL}\frac{dl_j}{dl_i} & U^j_{LX} & U^j_{LY} & U^j_{LL} \end{vmatrix}$$

(3.c)

Para asegurar que la función está en un valor máximo, es necesario que los menores del Hessiano bordeado, a partir del segundo menor, cuyo último término está en la posición h_{66}, se alternen en signo de forma que

$$|\overline{H}_2| > 0, |\overline{H}_3| < 0, |\overline{H}_4| > 0, |\overline{H}_5| < 0, |\overline{H}_6| > 0$$

(4)

Una vez hecho el ejercicio sencillo de mostrar las condiciones de segundo orden, o condiciones suficientes en el problema de maximización anterior, dejamos establecido el supuesto que en todos los siguientes modelos que se desarrollan en este trabajo se cumplen las condiciones indicadas, de modo que concentramos nuestras soluciones tan solo a las condiciones necesarias, o condiciones de primer orden.

Volviendo a las ecuaciones (2), si definimos a Y como el bien numerario, esto es: hacemos que todos los demás bienes expresen su valor en términos de Y, entonces ordenando los términos y dividiendo para las ecuaciones que contienen el numerario, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{U_X^i}{U_Y^i} &= \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{U_X^j}{U_Y^j} \\ \frac{U_L^i}{U_Y^i} &= \frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{U_L^j}{U_Y^j} \end{aligned} \qquad (5)$$

Las ecuaciones (5) no son otra cosa que la expresión del conocido óptimo de Pareto (ver Henderson y Quandt, 1971), condición que implica que las **tasas marginales de sustitución (TMS)** entre los individuos **i** y **j** sean iguales para obtener el óptimo social, esto es

$$TMS_i = TMS_j \qquad (6)$$

La Función de Bienestar Social

Si aceptamos la existencia de las funciones de utilidad individuales descritas en el acápite anterior, podemos también asumir la existencia de una función de **utilidad social** o **función de bienestar** (Varian, 1992), que no es otra cosa que la función agregada de preferencias de la sociedad:

$$\begin{aligned} &U(X,Y,L) = \underset{x_i,y_i,l_i}{Max}[U^i(x_i,y_i,l_i)] \\ &\forall i,\ i = 1,\dots,n \end{aligned} \qquad (7)$$

También existirá una **curva de transformación** o **frontera de posibilidades**, definida por la función implícita $T(X,Y,L)=0$

Definimos una nueva función de Lagrange para maximizar las preferencias sociales, sujetos a la restricción de las posibilidades de producción de la economía:

$$Max\Lambda = U(X,Y,L) - \lambda T(X,Y,L) \qquad (8)$$

Diferenciando con respecto a X, Y, L obtenemos las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial X} &= U_X - \lambda T_X = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_X}{T_X} = \lambda \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial Y} &= U_Y - \lambda T_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_Y}{T_Y} = \lambda \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial L} &= U_l - \lambda T_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_L}{T_L} = \lambda \end{aligned} \qquad (9)$$

Asumiendo que las condiciones de segundo orden son satisfechas, las ecuaciones (9) implican que

$$\begin{aligned} \frac{U_X}{T_X} &= \frac{U_Y}{T_Y} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_X}{U_Y} = \frac{T_X}{T_Y} \\ \frac{U_L}{T_L} &= \frac{U_Y}{T_Y} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_L}{U_Y} = \frac{T_L}{T_Y} \end{aligned} \qquad (10)$$

Las ecuaciones (10) nos muestran que las **tasas marginales de sustitución** en el consumo son iguales a las **tasas marginales de transformación** en la producción para toda la economía.

T_X / T_Y es la tasa marginal de transformación de X en Y, que resulta ser igual, excepto por el signo, a la pendiente de la curva de transformación. En efecto, si tomamos el diferencial total de la curva de transformación $T(X,Y,L)=0$ tenemos

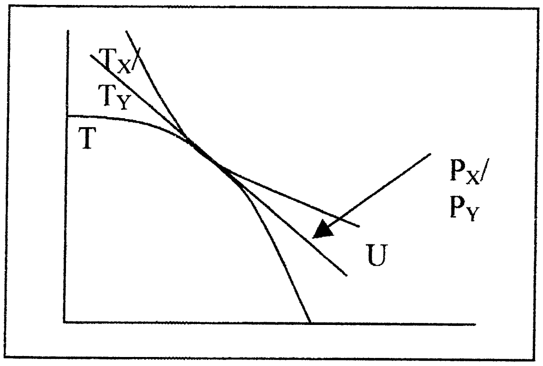
$$T_X dX + T_Y dY + T_L dL = 0 \qquad (11)$$

Si mantenemos invariable el esfuerzo de trabajo en la economía, esto es, manteniéndolo en un nivel constante, entonces $dL = 0$, lo que implica

$$T_X dX + T_Y dY = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{T_X}{T_Y} = \frac{dY}{dX} \qquad (12)$$

El resultado de este análisis se puede apreciar en el Grafico 1.

Gráfico 1
Las Matemáticas Simples del Equilibrio General
Tasas Marginales



Donde TT es la frontera de posibilidades y U es la función de bienestar social; la tangente a ambas curvas coincide en ser igual a la TMS y a la TMT.

Precios de Equilibrio en el Consumo

Introducimos ahora en el análisis precios para los bienes X e Y, además del salario que se paga en la economía por las unidades de trabajo. Para mantener las condiciones de competencia, asumimos que los precios son paramétricos, esto es, que están dados y por lo tanto son un dato para los agentes económicos: estos son **precio-aceptantes.**

Si hacemos que P_X sea el precio del bien X, P_Y el precio del bien Y, y W el salario corriente en la economía, entonces cada uno de los agentes tendrá una ecuación de presupuesto que iguale sus gastos a los ingresos que obtiene: el individuo i tendrá una ecuación de presupuesto

$$Wl_i = P_X x_i + P_Y y_i \qquad (13)$$

Para hacer máxima su utilidad, ahora el i_{avo} consumidor tendrá que contemplar la restricción que le impone su presupuesto, de modo que su problema de maximización ahora puede ser descrito por la siguiente función de Lagrange:

$$\begin{aligned} Max\ \Psi &= U^i(x_i, y_i, l_i) + \\ &+ \psi(Wl_i - P_X x_i - P_Y y_i) \end{aligned} \qquad (14)$$

Diferenciando con respecto a x_i, y_i, l_i y reordenando las condiciones de primer orden de este problema de maximización, obtenemos

$$\frac{U_X^i}{U_Y^i} = \frac{P_X}{P_Y}; \quad \frac{U_L^i}{U_Y^i} = \frac{-W}{P_Y} \qquad (15)$$

condiciones que, por virtud de las ecuaciones (5), implican

$$\frac{U_X^i}{U_Y^i} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{U_X^J}{U_Y^J}; \quad \frac{U_L^i}{U_Y^i} = \frac{-W}{P_Y} = \frac{U_L^J}{U_Y^J} \qquad (16)$$

Por tanto, ya que la igualdad entre TMS_i y TMS_j se cumple para todos los individuos i, j en la economía, podemos escribir esta condición en términos del agregado de las preferencias sociales:

$$\frac{U_X}{U_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \quad y \quad \frac{U_L}{U_Y} = \frac{-W}{P_Y} \qquad (17)$$

El efecto de esto lo podemos también ver en el gráfico 1, donde la tangente a las curvas de preferencias sociales y a la frontera de posibilidades, también es igual a la razón de los precios relativos. Se cumple entonces que, en condiciones de equilibrio general en la economía, las tasas marginales de sustitución en el consumo, las tasas marginales de transformación en la producción y la razón de precios relativos son iguales para todos los bienes económicos a disposición de los agentes de la sociedad.

Como corolario de lo que hemos analizado, se puede apreciar que la Ley de Walras en cuanto al equilibrio tiene como pareja inseparable al Óptimo de Pareto en términos de eficiencia. Este es, tal vez, el resultado más poderoso del análisis económico en condiciones de competencia perfecta [ver Varian, (1992)].

El Equilibrio en la Producción

Ahora suponemos que la producción de los bienes X e Y se organiza en la economía en dos sectores o industrias, las cuáles actúan competitivamente. Ambos sectores usan el trabajo humano L como único insumo. Por tanto las funciones de producción de las empresas en cada uno de los sectores pueden ser escritas como

$$X = \chi(L_X) \quad e \quad Y = \gamma(L_Y) \qquad (18)$$

Las funciones de ganancia para las empresas en cada sector son

$$\begin{aligned} \Pi_X &= P_X \chi(L_X) - WL_X \\ \Pi_Y &= P_Y \lambda(L_Y) - WL_Y \end{aligned} \tag{19}$$

respectivamente, por tanto las condiciones de primer orden en el problema de maximización, con respecto a la variable de decisión L_i, i=X,Y, son

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_X}{dL_X} &= P_X \frac{dX}{dL_X} - W = 0 \\ \frac{d\Pi_Y}{dL_Y} &= P_Y \frac{dY}{dL_Y} - W = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

de donde obtenemos las siguientes razones

$$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{dY / dL_Y}{dX / dL_X} \quad \text{y} \quad \frac{W}{P_Y} = \frac{dY}{dL_Y} \tag{21}$$

Estas ecuaciones (21), en la ausencia de externalidades en la economía, son la réplica microeconómica de las razones de transformación T_X/T_Y y T_L/T_Y respectivamente. En efecto, recordando que

$$T_X\, dX + T_Y\, dY + T_L\, dL = 0 \text{ si } dX = 0 \Rightarrow$$

$$T_Y dY + T_L dL = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{T_L}{T_Y} = \frac{dY}{dL}.$$

De manera análoga, si

$$dY = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{T_L}{T_X} = \frac{dX}{dL}.$$

Estos resultados implican que

$$\frac{dY / dL}{dX / dL} = \frac{-T_L / T_Y}{-T_L / T_X} = \frac{T_X}{T_Y} \tag{22}$$

Lo anterior nos dice que la razón de los productos marginales de X e Y con respecto al factor trabajo, es igual a la tasa de Tasa Marginal de Transformación entre X e Y.

Recapitulando, si reunimos las condiciones de optimización de ganancias individuales, es decir por empresas, y sociales, con las condiciones de maximización de bienestar social, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dY / dL_Y}{dX / dL_X} &= \frac{T_X}{T_Y} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{U_X}{U_Y} \\ \frac{dY}{dL_Y} &= -\frac{T_L}{T_Y} = \frac{W}{P_Y} = \frac{U_L}{U_Y} \end{aligned} \tag{23}$$

Estas relaciones son las condiciones competitivas del equilibrio social.

3. ALEJARSE DE LA COMPETENCIA INTRODUCE UNA DISTORSIÓN: EL MONOPOLIO

¿Qué sucede cuando las actividades de las empresas se separan del supuesto de competencia perfecta? Supongamos ahora que uno de los sectores de la economía, digamos el sector que produce el bien X, actúa bajo las condiciones de monopolio. En esta situación el empresario que está produciendo este bien ya no considera al precio P_X como un dato; ahora el precio que el productor percibe varía con la cantidad demandada del bien en cuestión:

$$P_X = D_X(X) = D_X[\chi(L_X)] \tag{24}$$

Ahora el ingreso total de la empresa que produce X es $R_X = D_X[\chi(L_X)] \cdot \chi(L_X)$ y sus ganancias se maximizan como

$$\Pi_X = R_X - WL_X \tag{25}$$

Las condiciones de primer orden de este problema están dadas por

$$\frac{d\Pi_X}{dL_X} = \frac{dR_X}{dX}\frac{dX}{dL_X} - W = 0 \tag{26}$$

Entretanto, como el bien Y se sigue produciendo bajo competencia, entonces para las empresas del sector Y se mantiene

$$\frac{d\Pi_Y}{dL_Y} = P_Y \frac{dY}{dL_Y} - W = 0 \tag{27}$$

Si ahora combinamos las ecuaciones de maximización de ganancias de los dos sectores y las unimos con las condiciones de equilibrio de la curva de transformación de la economía, obtenemos

$$\frac{dY / dL_Y}{dX / dL_X} = \frac{T_X}{T_Y} = \frac{dR_X / dX}{P_Y} \tag{28}$$

Comparando este resultado con las ecuaciones (23), vemos que la primera ecuación de esas no coincide con (28), pues resulta que hemos reemplazado el precio P_X por el término del ingreso marginal dR_X / dX y, por efecto que bajo monopolio, $(dR_X / dX) < P_X$, resulta que $(dR_X / dX) / P_Y$ es menor que P_X / P_Y.

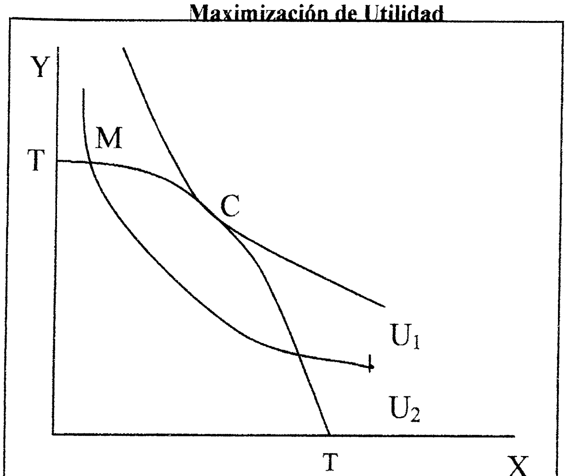
Pero los consumidores realizan sus decisiones en base a los precios que observan en el mercado, esto es P_X y P_Y, sin percatarse de cuál es el ingreso marginal de las empresas. Por tanto, la maximización de utilidad que hacen los agentes en el consumo responde a la relación de precios expresados en la razón P_X / P_Y.

En estas circunstancias, el equilibrio ocurrirá en una situación mixta, en la que prevalecerán relaciones del siguiente tipo:

$$\frac{T_X}{T_Y} = \frac{dR_X / dX}{P_Y} < \frac{P_X}{P_Y} = \frac{U_X}{U_Y} \qquad (29)$$

Por consiguiente, la relación $T_X / T_Y = U_X / U_Y$ necesaria para el óptimo en el bienestar social ha sido violada, obteniéndose por tanto una condición inferior. Esta situación se la puede observar del análisis en el Gráfico 2.

Gráfico 2
Las Matemáticas Simples del Equilibrio General
Maximización de Utilidad



Podemos observar en la figura anterior que la pendiente de la curva de indiferencia social representada por U_2, cuando X es vendido bajo una situación de monopolio, mientras que Y sigue siendo producido y vendido bajo condiciones de competencia, excede a la pendiente de la curva de transformación: se obtiene un punto como M en la figura, en lugar del punto C que correspondía a la situación de equilibrio bajo competencia.

Ahora la sociedad termina ubicándose en una curva de indiferencia U_2, con una cantidad del bien X disponible relativamente inferior, mientras que el bien Y es producido en una cantidad relativamente mayor que lo que hubiese ocurrido en la posición óptima C. En otras palabras, la solución alcanzada no significa la mayor satisfacción para la sociedad en su conjunto, pues existe una cantidad de Y superior a lo que se desea socialmente, mientras que la cantidad disponible de X es inferior a la que se hubiese esperado.

Una forma posible de evitar el desequilibrio producido por la solución anterior, podría ser la de provocar una solución de monopolio generalizado en la economía, obligando a la industria que produce el bien Y a actuar como si fuese un monopolio. Esto se lo puede lograr estableciendo un impuesto, multa o cuota en la producción del bien Y. Para entenderlo, supongamos que en equilibrio el ingreso marginal (IMg_X) puede ser definido como

$$\frac{dR_X}{dX} = kP_X; \quad \text{donde } k = (1 - \frac{1}{\varepsilon_X}) < 1 \qquad (30)$$

siendo ε_X la elasticidad-precio de la demanda por el bien X.

La expresión para k la obtenemos precisamente de la condición monopólica que prevalece en la industria del bien X; de hecho la expresión proviene del modelo matemático usualmente utilizado para deducir una medida de poder de mercado, o poder monopólico, usualmente conocida como el índice de Lerner (Carlton y Perloff, 1994).

Si el ingreso total para esa industria es $IT = P_X X$, entonces

$$IMg_X = P_X + X\frac{dP_X}{dX} = P_X\left[1 + \frac{X}{PX}\frac{dP_X}{dX}\right] \qquad (31)$$

Como sabemos, la elasticidad-precio de la demanda está definida como

$$\varepsilon_X = -\left[\frac{P_X}{X}\frac{dX}{dP_X}\right] \qquad (32)$$

de donde $\frac{1}{\varepsilon_X} = -(\frac{X}{P_X}\frac{dP_X}{dX})$ y, como una condición para la operación de un monopolio es $|\varepsilon_X| > 0$, entonces

$$k = \left[1 - \frac{1}{\varepsilon_X}\right] < 1 \qquad (33)$$

Si de alguna manera se logra que en la producción del bien Y el ingreso marginal de las empresas sea igual a $dR_Y / dY = kP_Y$ el equilibrio en el mercado de bienes sucederá en las siguientes condiciones:

$$\frac{dY/dL_Y}{dX/dL_X} = \frac{T_X}{T_Y} = \frac{dR_X/dX}{dR_Y/dY} = \frac{kP_X}{kP_Y} = \frac{U_X}{U_Y} \qquad (34)$$

Si ese es el caso, las condiciones de máximo bienestar, dadas por (23)

$$\frac{U_X}{U_Y} = \frac{T_X}{T_Y}$$

vuelven a ser obtenidas.

Sin embargo, ahora se producen problemas con la satisfacción de la condición

$$\frac{U_L}{T_L} = \frac{U_Y}{T_Y} \Rightarrow \frac{U_L}{U_Y} = \frac{T_L}{T_Y}$$

que son parte de (23). Esto sucede porque ahora, con la producción del bien Y bajo condiciones de monopolio, la maximización de ganancias para el sector que produce el bien Y son $(dR_Y / dY) \bullet (dY / dL_Y) = W$

Si mantenemos el supuesto $dR_Y / dY = kP_Y$, entonces tenemos

$$kP_Y \bullet \frac{dY}{dL_Y} = W \qquad (35)$$

pero sabemos que $dY / dL_Y = -T_L / T_Y$, por lo tanto

$$-\frac{T_L}{T_Y} = \frac{W}{kP_Y} \qquad (36)$$

De esto vemos claramente que $W / kP_Y > W / P_Y$, lo que significa que el valor del salario relativo en el sector Y, bajo condiciones de monopolio, es mayor que lo que este precio relativo es bajo condiciones de competencia.

Los consumidores, quiénes pagan en el mercado el precio P_Y desde el punto de vista de consumo, pero reciben el salario W como trabajadores en cualquiera de los sectores de la economía, maximizan su utilidad y llegan al equilibrio en el consumo cuando

$$-\frac{U_L}{U_Y} = \frac{W}{P_Y} \qquad (37)$$

Por lo tanto, el equilibrio general en la economía, bajo estas condiciones ocurrirá cuando

$$-\frac{T_L}{T_Y} = \frac{W}{kP_Y} > \frac{W}{P_Y} = -\frac{U_L}{U_Y} \qquad (38)$$

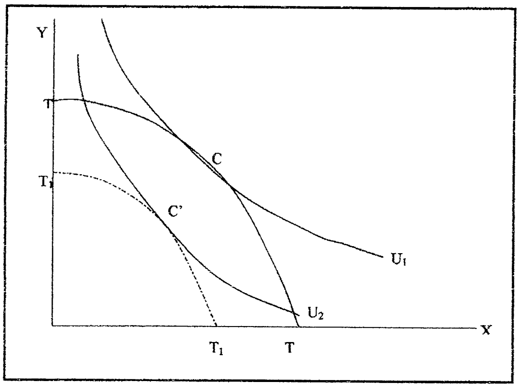
Esta situación produce una falla en la satisfacción de la condición de maximización de bienestar en el agregado social.

En efecto, esto último implica que la razón del "precio del ocio" W al precio del bien Y percibido por los consumidores, en su calidad de oferentes de trabajo, es inferior a la razón dada por W / kP_Y que guía las decisiones de los productores. En estas condiciones, entonces, el equilibrio posiblemente ocurrirá con una **cantidad de ocio relativamente mayor** y una **cantidad de bienes consumidos relativamente menor**, que lo que hubiese sucedido bajo el conjunto de condiciones que maximizan el bienestar social en una organización económica competitiva.

Gráfico 3

Las Matemáticas Simples del Equilibrio General

Equilibrio del Máximo Bienestar



Esto significa que la curva de transformación TT se mueve hacia adentro, por ejemplo a T_1T_1, con lo que el equilibrio se desplaza del punto de tangencia C al punto de tangencia C'.

Para restaurar la igualdad entre T_L / T_Y y U_L / U_Y requerida para el equilibrio del máximo bienestar, sería necesario que de alguna manera se produzca una condición como 1) que se reduzca el salario que los productores perciben pagar a los asalariados en un monto equivalente al factor k, o 2) que se incremente el salario que los consumidores, en su calidad de oferentes del factor trabajo, perciben recibir por el equivalente al factor 1/k.

Esto se puede lograr a través de un sistema de subsidios, que por ejemplo premien a las empresas por el número de trabajadores que contratan, o que castiguen el salario (subsidio negativo) por un monto suficiente para disminuir su percepción; pero este sistema generalmente resultará poco práctico y normalmente introducirá otro tipo de distorsión. En general los economistas mantienen una abierta controversia sobre la conveniencia de introducir correctivos en forma de subsidios directos o indirectos, pues estos se prestan a desviar la manera como los agentes económicos perciben el accionar de las fuerzas del mercado y las mas de las veces, lejos de corregir situaciones de desequilibrio, tienden a introducir efectos perversos que alejan aún mas las condiciones de equilibrio y de optimalidad.

4. TEORÍAS DEL SECOND BEST

Frente a la situación alejada del óptimo que es causada por una distorsión en el equilibrio general, que a su vez se origina por un caso como el de la existencia de monopolio, los economistas mantienen una diferencia de criterios sobre cómo evitar o mejorar tal situación.

Un número importante de economistas plantean la necesidad imperiosa de intervención del Estado para poner en orden la situación; las proposiciones van desde la directa intervención, como por ejemplo las estatizaciones de empresas privadas que eventualmente se observan en distintos países, o el establecimiento de cuotas, límites, precios topes o precios mínimos, hasta la implantación de impuestos o subsidios para corregir las situaciones, tal como lo hemos discutido mas arriba.

Otra posición totalmente contraria al intervencionismo, es aquella que toman otros economistas sugiriendo que los efectos de las intervenciones de la autoridad, lejos de corregir los problemas, tienden a provocar efectos malvados y alejan aún más la solución al causar otras distorsiones.

En esta última posición se colocan los economistas que abogan por la no intervención, sugiriendo que sean los propios agentes económicos, si no las fuerzas del mercado, los que encuentren las acciones que permitan superar los efectos negativos del desequilibrio. Subyacente a esta posición está la convicción que el óptimo absoluto es inalcanzable, por tanto solo puede ser buscado un resultado inferior, pero dentro de su inferioridad debe ser encontrado el resultado menos inferior: es como decir que se quiere optimizar lo inferior para acercarlo lo más posible al resultado superior. Esto es lo que se entiende como la búsqueda del "second best" (segundo mejor) cuando la realidad nos indica que el "first best" (lo óptimo) no es posible de lograr (J. M. Henderson y R. E. Quandt, 1995)

Para conseguir este objetivo, los economistas del second best sugieren que todo lo que se debe hacer es proporcionar a los agentes económicos la mejor y mas acertada información sobre las condiciones y causas que originan los problemas que impiden alcanzar la solución óptima: con esta información, los agentes deben manejarse para lograr el más alto resultado, obteniéndose entonces el "mejor óptimo" posible para la sociedad.

La teoría de los óptimos de segunda preferencia o "segundo óptimo" afirma que, si una o más de las condiciones de primer grado para un óptimo de Pareto no puede satisfacerse debido a restricciones externas (también llamadas a veces restricciones institucionales), en general no es necesario ni deseable que se satisfagan las condiciones de Pareto restantes. Esta teoría se ha utilizado para juzgar la deseabilidad de las políticas encaminadas a alcanzar el resultado de Pareto en condiciones fragmentarias (Henderson y Quandt, 1995).

Para ilustrar la discusión en términos de un modelo matemático, desarrollamos a continuación una forma muy general desarrollada originalmente por Lipsey y Lancaster (1956) con modificaciones simples mostradas por Silberberg y Suen (2001).

Asumamos que la existencia de un monopolio en el sector X impide a la sociedad alcanzar la maximización de la condiciones de bienestar. Para obstaculizar una solución de "primer óptimo" en un mundo de monopolios debe existir un sector (por ejemplo, el mercado de ocio-trabajo) cuyo comportamiento competitivo no puede ser desviado de las reglas de la competencia; en otras palabras, ya que existe una distorsión en el mercado del bien X, quisiéramos ajustar el mercado laboral para evitar que esa distorsión altere el equilibrio general: para esto deberíamos colocar un subsidio al trabajo, pero aquello generaría una alteración en la capacidad de compra de otros bienes y resultaría en otra distorsión adicional (Mas-Collel et. al., 1995).

Partimos, entonces, del supuesto desarrollado mas arriba: es imposible lograr la igualdad de la tasa marginal de sustitución en el consumo entre X y L con la tasa marginal de transformación en la producción entre X y L. Concretamente,

$$\frac{T_X}{T_L} = k\frac{U_X}{U_L}$$
$$k = (1 - \frac{1}{\varepsilon_X}) < 1 \qquad (39)$$

Esta condición actúa como una restricción sobre la sociedad en su habilidad para maximizar su bienestar.

El proporcionar a los agentes económicos de esta supuesta sociedad con la información de la causa exacta de la distorsión, esto es la existencia del factor k afectando al mercado de consumo del bien X, permite a estos actuar de una manera racional que equivale a manipular la producción y los precios en los sectores en que existe un "control de mercado" (esto es, en el sector Y, ya que en nuestro modelo solo existen dos sectores). Esto equivale a buscar una solución de "segundo óptimo".

Si este fuera el caso, ahora la sociedad trata de maximizar la función de utilidad $U(X,Y,L)$ sujeta a la función de transformación $T(X,Y,L) = 0$ y a la condición adicional dada por la ecuación (39), que se ha convertido un una restricción.

Construimos la correspondiente función de Lagrange

$$\max \Psi = U(X,Y,L) - \lambda T(X,Y,L) - \psi\left[\frac{T_X}{T_L} - k\frac{U_X}{U_L}\right] \qquad (40)$$

Obtenemos las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X} = U_X - \lambda T_X - \psi\left[\frac{T_L T_{XX} - T_X T_{XL}}{(T_L)^2} - k\frac{U_L U_{XX} - U_X U_{XL}}{(U_L)^2}\right] = 0 \qquad (41)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial Y} = U_Y - \lambda T_Y - \psi\left[\frac{T_L T_{XY} - T_X T_{YL}}{(T_L)^2} - k\frac{U_L U_{XY} - U_X U_{YL}}{(U_L)^2}\right] = 0 \qquad (42)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial L} = U_L - \lambda T_L - \psi\left[\frac{T_L T_{XL} - T_X T_{LL}}{(T_L)^2} - k\frac{U_L U_{XL} - U_X U_{LL}}{(U_L)^2}\right] = 0 \qquad (43)$$

Arreglando y ordenando términos obtenemos entre (41) y (42)

$$\frac{U_X}{U_Y} = \frac{P_X}{P_Y} = \frac{T_X + \frac{\psi}{\lambda}\left[\frac{T_L T_{XX} - T_X T_{XL}}{(T_L)^2} - k\frac{U_L U_{XX} - U_X U_{XL}}{(T_L)^2}\right]}{T_Y + \frac{\psi}{\lambda}\left[\frac{T_L T_{XY} - T_X T_{YL}}{(T_L)^2} - k\frac{U_L U_{XY} - U_X U_{YL}}{(U_L)^2}\right]} \qquad (44)$$

Desgraciadamente, a partir de este resultado no hay manera de obtener una información detallada sobre los gustos de los consumidores y la tecnología de producción para evaluar adecuadamente los signos de las derivadas cruzadas que se obtienen en estas condiciones de primer orden, tales como U_{XY} y T_{YL}. Aún si los signos de estas derivadas fueran conocidos, los signos de la expresión completa en cada uno de los términos entre corchetes pueden ser determinados tan solamente si las magnitudes exactas de todos sus componentes pudieran ser obtenidas.

Una posible excepción a este problema puede obtenerse aplicando el supuesto de utilidades independientes, siguiendo la elaboración de Samuelson (1971). Si las funciones de bienestar (utilidad agregada) y de transformación son separables, todas las derivadas parciales cruzadas como las contenidas en los corchetes se hacen iguales a cero. Esto ocurre cuando la utilidad marginal de un consumidor obtenida del bien X no es afectada por cambios en las cantidades consumidas del bien Y, o cuando la productividad marginal física en la producción del bien Y no queda afectada por cambios en la cantidad total de trabajo empleado en la economía.

Si tanto las funciones de bienestar como de transformación son separables, entonces para cualquier bien cuya producción sea susceptible a una decisión de "segundo óptimo", los términos entre corchetes de las condiciones de primer orden para obtener un máximo, como por ejemplo en (44), se hacen iguales a cero. En este caso, las condiciones de primer orden se ajustan a las reglas del primer óptimo, u óptimo de Pareto.

Si no existen las condiciones de separabilidad indicadas el sentido práctico de una ecuación como la (44) es de poco valor, ante la virtual imposibilidad de observar y medir las derivadas de las funciones de utilidad y de transformación.

Esto implica que si bien las teorías del second best tienen un importante sentido teórico, su aplicación a la solución pragmática de los desajustes causados por los desvíos a las reglas de la competencia perfecta es poco atractiva.

5. CONCLUSIONES

1. Como hemos visto en este artículo, la aplicación de los conceptos de la teoría económica al análisis del equilibrio general bajo condiciones de competencia nos permite derivar conclusiones exactas para el equilibrio estable de las variables fundamentales. La aplicación de modelos matemáticos sencillos nos ilustran de una manera elegante un poderoso resultado, que además resulta simétrico en el análisis de la producción y el consumo, pues la pieza clave de la igualdad entre tasas de sustitución en el consumo y tasas de transformación en la producción son simplemente los precios.

2. Al perderse las condiciones competitivas, introduciendo por ejemplo la distorsión del monopolio, aunque sea tan solo en uno de los aspectos de la economía global, los beneficios del equilibrio general se pierden al producirse desigualdades fundamentales entre la maximización del consumo y la producción.

3. La corrección de las condiciones que alejan a uno o mas mercados de la competencia implica la necesidad, para algunos teóricos de la economía, de la intervención de autoridades que afectan de manera exógena al funcionamiento de los mercados, estableciendo impuestos o subsidios como herramientas correctivas, o simplemente imponiendo acciones de comando que actúan coercitivamente sobre los agentes económicos.

4. Tales intervenciones tienen las más de las veces efectos perversos, puesto que al aplicarse correctivos sobre un sector, como por ejemplo un subsidio al salario, los otros sectores no quedan inmunes a sus reacciones en otros ámbitos del mercado: por ejemplo al subsidiarse el rol de pagos de las empresas del sector X habrá un exceso de demanda por trabajo en ese sector y obligará a un incremento de salarios en otros sectores.

5. Para evitar los efectos indicados, algunos economistas abogan por la no intervención y de estas posiciones surgen teorías alternativas al óptimo de Pareto, como las llamadas teorías del second best. Aquí lo que se pretende, en lugar de intervención directa, es proporcionar a los agentes económicos de herramientas, sobre todo de información, para que tomen conciencia de la imposibilidad de alcanzar soluciones óptimas. Lo que se busca ahora es lograr un resultado que sea "lo mejor de lo posible", sabiendo que no es "lo mejor de lo mejor".

6. El resultado, por desgracia, no es tan nítido, elegante y exacto como cuando actuamos bajo condiciones de competencia. Las conclusiones en estos casos no pueden ser generalizadas y necesitamos imponer supuestos mucho más restrictivos, como la exigencia de que las funciones de transformación en la producción y de utilidad en el consumo cumplan con condiciones de separabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **BERCK, P. & SYDSAETER, K.**, (1994). *"Formulario para Economista"*. Antoni Bosch, Barcelona.

2. **DEBREU, G.** (1959). *Theory of Value*. Wiley, New York..

3. **BLAUG, M.** (1978) *Economic Theory in Retrospect.* Cambridge University Press, New York.

4. **COASE, R.H.** (1988) *The Firm, the Market and the Law*. The University of Chicago Press, Chicago.

5. **CARLTON, D.W. & J.M. PERLOFF.** (1994). *Modern Industrial Organization.* Addison-Wesley, New York.

6. **CHIANG, A.C.** (1974) *Fundamental Methods of Mathematical Economics.* McGraw-Hill, New York.

7. **DAMERON, P.** (2001). *Mathématiques des Modèles Economiques.* Ed. Economica, París.

8. **HENDERSON, J.M. & R.E.** (1971) Quandt. *Microeconomic Theory: a Mathematical Approach.* McGraw-Hill, New York.

9. **HENDERSON, J.M. & R.E. QUANDT.** (1995) *Teoría Microeconómica.* Ariel Economía. Barcelona, España.

10. **KLEIN, E.** (1973) *Mathematical Methods in Theoretical Economics: Topological and Vector Space Foundations of Equilibrium Análisis.*Academic Press, New York.

11. **LIPSEY, R.G. & K. LANCASTER.** *"The General Theory of Second Best"*, Review of Economic Studies 24, No. 1 (1956): 26-27.

12. **MAS-COLELL, A. WHINSTON, M.D. & J.R.** (1995). Green. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York.

13. **MORISHIMA, M.** (1977) *Walras' Economics: A pure theory of capital and money.* Cambridge University Press, Londres, Inglaterra.

14. **SAMUELSON, P.A.** (1971) *Fundamentos del Análisis Económico.* Editorial "El Ateneo", Buenos Aires.

15. **SIBERBERG, E. & W. SUEN.** (2001)*The Structure of Economics: A Mathematical Analysis.* Irwin McGraw-Hill, New York.

16. **TAKAYAMA, A.** (1990) *Mathematical Economics.* Cambridge University Press, New York.

17. **THOMAS, G.B.** (1969) *Calculus.* Addison-Wesley Publishing Co. Reading, Massachusetts.

18. **TIROLE, J.** (1998) *The Theory of Industrial Organization.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

19. **VARIAN, H.** (1992) *Microeconomic Analysis.* W.W. Norton, New York

20. **WALRAS, L.** (1874) *Eléments d'Économie Politique Pure.* Corbaz, Lausanne.

21. **WALSH, V. & H. GRAM.** (1980) *Classical and Neoclassical Theories of General Equilibrium: Historical Origins and Mathematical Structure.* Oxford University Press, New York.