MATEMÁTICA
ESPOL - FCNM JOURNAL
2022, Vol. 20, No. 2 Julio - Diciembre

Unos puntos interesantes: Una exploración del concepto en geometría algebraica y en teoría de categorías

Some interesting Points: An exploration of the concept in algebraic geometry and category theory

Alejandro Martínez Méndez

Recepción: 28/11/2021 **Aceptación:** 19/07/2022 **Publicación:** 31/07/2022

Abstract The concept of a “point” has been a part of mathematics since its early days, it’s an intuitive idea that every person implicitly knows. Nonetheless, if the concept is formalised and abstracted there appear new intrinsic properties that are more complex than the euclidean idea of being “that which has no parts”. Two paths are explored: the first one using Algebraic Geometry and structures that come from algebraic objects and the second one using the language of Category Theory.
Keywords geometry, prime spectrum, terminal object.

Resumen El concepto de “punto” ha sido parte de las matemáticas desde sus primeros días, es una idea intuitiva que toda persona conoce implícitamente. Sin embargo, si se abstrae y se formaliza el concepto, aparecen propiedades intrínsicas más complejas que la idea euclideana de ser “aquello que no tiene partes”. Exploramos dos vías por las cuales el concepto puede ser visto: la primera mediante Geometría Algebraica y estructuras que surgen de objetos algebraicos y la segunda mediante el lenguaje de Teoría de Categorías.
Palabras Claves espectros de anillos, geometría, objeto terminal.

1 Introducción

El Teorema del Punto Gordo es un chiste que dice que cualesquiera tres líneas concurren en un punto si este es lo suficientemente gordo. Un punto “gordo” es un oxymorón... ¿Pero qué pasa si jugamos con el concepto de “punto” para ver qué tan “gordo” lo podemos hacer?

Alejandro Martínez Méndez, MSc.
Investigador Independiente, Morelia, México, e-mail: alejandro.martinez@cimat.mx,
https://orcid.org/0000-0002-4837-8868

Nota: Para el presente artículo de divulgación, lo importante es la intuición de los conceptos más que las definiciones formales, por lo que se pide al lector apoyarse en los ejemplos dados.

Euclides estableció un **punto**, $\bullet$, como "aquel que no tiene partes" (Fitzpatrick, 2007). Esta idea es intuitiva y útil para hacer geometría.

A priori parece que un punto no posee información por si mismo y para poder obtenerla se necesitan considerar más cosas. Por ejemplo se pueden considerar las "coordenadas" de un punto y de esta manera, un punto provee información de donde está en el espacio. Sin embargo, aún considerando esto, dos puntos diferentes siguen teniendo la misma "forma": $\bullet$

Newton introdujo el concepto de derivada imaginando una partícula (punto) moviendo en línea recta y poniéndole pausa al tiempo en un instante determinado (Newton, 1736). En este instante se está moviendo a cierta velocidad y se está acelerando (o desacelerando): un punto $\bullet$ viene equipado con un lugar en el espacio, velocidad y aceleración.

Entonces se le puede asignar a un punto información adicional. En este texto analizaremos dos construcciones de "puntos" que poseen información, para ello se necesita el concepto de **conjunto**.

1.1 Conjuntos

La idea intuitiva de una colección de "objetos" (o "elementos") con una relación de "pertenencia" es suficiente para hablar de **conjuntos**. Denotamos que un elemento "pertenece" a un conjunto con "$\in$" y que un conjunto es subconjunto de otro con "$\subset$', el conjunto vacío (i.e. que no contiene objetos) es "$\emptyset$", la intersección (los elementos en común) y unión (todos los elementos de varios conjuntos) de conjuntos se denotan por "$\cap$" y "$\cup$" respectivamente (Halmos, 1960). Un conjunto X es "más pequeño" que otro Y si todos sus elementos están contenidos en él, en este caso se dice que es un "subconjunto" y se denota $X \subseteq Y$.

Ejemplo: El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto X (es decir, para todo conjunto X se tiene que $\emptyset \subseteq X$).

Ejemplo: El conjunto con dos números $\{0, 1\}$, tiene como subconjuntos $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$.

Ejemplo: Los números enteros $\{..., -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ son un conjunto y los números pares $\{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ son un subconjunto de los enteros.

En este caso, un "punto" es simplemente un objeto dentro de un conjunto. Un **conjunto unitario** tiene un solo elemento y es un punto "como conjunto". Se puede obtener una definición equivalente de este:

Un conjunto P es unitario si y solo si, dado cualquier otro conjunto C, existe una única función $f : C \to P$ (MacLane, 1971). Se volverá a esta definición.

Las anteriores definiciones nos dan la libertad de tener elementos "complicados" y podemos tener cosas más interesantes que califican como punto.

2 Puntos dentro de puntos

2.1 Anillos

Para lo siguiente usaremos estructuras algebraicas llamadas anillos. Un **anillo** es un conjunto R con dos operaciones, denotadas por $+$ y $*$, tales que

1. $*$ es asociativa (es decir, $a * (b * c) = (a * b) * c$) para todo $a, b, c \in R$

Y $+$ cumple que:

1. Es asociativa y conmutativa ($a + b = b + a$ para todo $a, b \in R$)
2. Existe un **neutro** para $+$ (i.e. un elemento $0 \in R$ tal que $a+0 = a$ para todo $a \in R$)
3. Todo elemento tiene un inverso (i.e. para todo $a \in R$ existe $b \in R$ tal que $a+b = 0$)

(Atiyah y MacDonald, 1994).

Un anillo es conmutativo si $a * b = b * a$ para todo $a, b \in R$. Asumiremos en este texto que los anillos son conmutativos y que $*$ tiene un neutro llamado 1 que cumple que $a*1 = a$ para todo $a \in R$. Un elemento a con inverso con respecto a $*$ (i.e. existe $b \in R$ tal que $a*b = 1$) lo llamamos **unidad**. Un anillo conmutativo donde todos los elementos no-cero son unidades es llamado **campo** (Atiyah y MacDonald, 1994).

Ejemplo: Los números enteros ($\mathbb{Z}$), los reales ($\mathbb{R}$), los complejos ($\mathbb{C}$) y los racionales ($\mathbb{Q}$) son anillos conmutativos con las operaciones $+$ de suma y $*$ de producto usuales y $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Q}$ son campos.

Ejemplo: Los polinomios con coeficientes en cualquiera de los anillos de arriba también son un anillo.

Ejemplo: Las matrices de $n \times n$ con coeficientes en los números reales con el producto y suma de matrices es un ejemplo de un anillo no conmutativo.

2.2 Espacios topológicos

La manera obvia de definir un “punto” en un anillo es simplemente tomando un subconjunto de él con un solo elemento, por ejemplo el “punto” $\{2\}$ en los enteros o $\{1 + 3i\}$ en los complejos; pero queremos definir puntos “más complicados”.

Un anillo no aparenta tener propiedades geométricas, así que para crear puntos más complicados, necesitamos el concepto de **topología**.

Una **topología** sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X que cumplen que:

1. Si dos subconjuntos A y B están en la topología, entonces su intersección $A \cap B$ también lo está.
2. Si una colección de subconjuntos (posiblemente infinita) está en la topología, entonces la unión de todos también lo está.
3. El subconjunto vacío y el conjunto total X están en la topología.

Los subconjuntos pertenecientes a una topología se llaman **abiertos** y sus **complementos** (el complemento de un subconjunto A es el subconjunto que queda cuando se remueven todos los elementos de A de X) se llaman **cerrados**. La **cerradura** de un subconjunto es el cerrado más pequeño que lo contiene. X junto con una topología sobre él es llamado un **espacio topológico** (Salicrup, 1993).

De manera equivalente una topología es definida por un conjunto X con una colección de subconjuntos [cerrados] que cumplen que:

1. El vacío y el total son cerrados
2. La intersección arbitraria y unión finita de cerrados son cerrados

Ejemplo: Los subconjuntos (a, b) de los números reales $\mathbb{R}$ (i.e. los reales $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b$) son abiertos y los subconjuntos $[a, b]$ (los reales $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq b$) son cerrados. La topología formada por estos es llamada **topología usual** (Salicrup, 1993).

Ejemplo: Dado un subconjunto abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ como arriba, su cerradura es $[a, b]$.

Ejemplo Si tomamos un conjunto con dos elementos $X = \{0, 1\}$ se le puede dar la **topología de Sierpinski** declarando los subconjuntos X, $\emptyset$ y $\{0\}$ como abiertos (Salicrup, 1993).

Un subconjunto es **denso** si su cerradura es X.

Ejemplo: Los subconjuntos de números racionales e irracionales son densos en los reales.

Ejemplo: En $X = \{0, 1\}$ con la topología de Sierpinski, el $\{0\}$ es denso ya que el único cerrado que lo contiene es $X = \{0, 1\}$

En términos sencillos, una topología es una manera de definir un concepto de "cercanía" en un conjunto: Dos objetos son "cercanos" si existe un abierto "pequeño" que contiene a los dos (Hartshorne, 1962). El concepto de "cerradura" nos deja hablar de "cercanía" a subconjuntos: Un objeto está "cerca" de un subconjunto si está en su cerradura (Arkhangel'skii, 1990). Entonces, un subconjunto denso es uno que está cercano a todo.

Ahora no solo podemos considerar los "puntos" de un conjunto, sino que tenemos una noción de cercanía entre ellos.

2.3 Ideales de un anillo

Un anillo R tiene subconjuntos llamados **ideales** que cumplen con ser subconjuntos $I \subset R$ que no contienen al 1 y si $a \in I$ entonces $a * b \in I$ para todo $b \in R$ (notemos que 0 está en todos los ideales).

Los ideales **primos** cumplen con una propiedad extra: Si $a * b$ está en el ideal entonces forzosamente a ó b están en el ideal. Todo ideal está contenido en un ideal primo y dado un subconjunto $S \subset R$, llamamos $< S >$ al ideal más pequeño que contiene a S (llamado el **ideal generado por** S), este no necesariamente es primo (Atiyah y MacDonald, 1994).

Ejemplo: Un campo arbitrario (e.g. los números reales) solo tiene como ideal al $\{0\}$ (Atiyah y MacDonald, 1994).

Ejemplo: En $\mathbb{Z}$, los ideales son de la forma $n\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z}$ tales que x es múltiplo de $n\}$. $\mathbb{Z}_n$ es primo si n es un número primo, en caso contrario no lo es.

La **suma** de dos ideales I, J es el ideal $I + J := \{x + y$ tales que $x \in I$, $y \in J\}$ y el **producto** es el ideal $IJ := \{$sumas finitas de elementos de la forma $x * y$ tales que $x \in I$, $y \in J\}$ (Atiyah y MacDonald, 1994).

Ejemplo: Considerando $\mathbb{Z}$ y dos enteros m, n, $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ donde d es el máximo común divisor de m y n y $n\mathbb{Z}m\mathbb{Z} = nm\mathbb{Z}$

A priori, estos ideales no dan mucho indicio acerca de como se puede definir una topología. Sin embargo, hay una manera de hacerlo que es muy importante en la **geometría algebraica**.

2.4 Topología de Zariski

Llamamos al conjunto de ideales primos de un anillo R el **espectro de** *R:Spec(R)*. Los puntos serán ideales primos ¡y estos difieren mucho del concepto de punto que tenía Euclides! Se puede dotar al espectro con la **topología de Zariski** de la siguiente manera (Hartshorne, 1977):

Tomemos $a \subset R$ un subconjunto de R. Entonces $V(a)$, el **cerrado asociado a** a o **la cerradura de** a, será el conjunto de ideales primos p que contienen a a. En términos matemáticos: $V(a) := \{p \in Spec(R) \mid a \subset p\}$. Además $V(a) = V(< a >)$ (Hartshorne, 1977) por lo que podemos “ignorar” los símbolos “<, >”.

Tenemos las siguientes propiedades (Görtz y Wedhorn, 2010):

- $V(R) = \emptyset$
- Si I, J son ideales entonces $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$ y $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$
- Si $I \subset J$ entonces $V(J) \subset V(I)$

Ejemplo: El único ideal primo de $\mathbb{R}$ es $\{0\}$ por lo que $Spec(\mathbb{R}) = \{0\}$

Ejemplo: Considerando el anillo de números enteros, los puntos de $Spec(\mathbb{Z})$ serán los ideales de la forma $\{0\}$ y $p\mathbb{Z}$ donde p es un número primo. Si tomamos un número $n \neq 0$ entonces, por el teorema fundamental de la aritmética, sabemos este será un producto de primos diferentes [a ciertas potencias] (Niven, Zuckerman, y Montgomery, 1960) (Niven, et al., 1960), digamos que los primos en este producto son $p_1, p_2, ..., p_m$. Entonces $V(n) = V(p_1) \cup V(p_2) \cup ... \cup V(p_m) = \{p_1\mathbb{Z}, p_2\mathbb{Z}, ..., p_m\mathbb{Z}\}$. Si tenemos dos enteros n y m entonces $V(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}) = V(d\mathbb{Z})$ donde d es el máximo común divisor de m y n.

2.5 *Puntos "gordos" en Spec(R)*

En el ejemplo anterior, hubo un punto especial en $Spec(\mathbb{Z})$ que casi no mencionamos: $\{0\}$. Si $\{p\mathbb{Z}\}$ es cualquier punto, entonces $0 \in \{p\mathbb{Z}\}$ ¡por lo que $V(\{0\}) = Spec(\mathbb{Z})$! Esto significa que $\{0\}$ es un punto denso dentro de $\mathbb{Z}$, ¡está 'cerca' de todos los puntos de $Spec(\mathbb{Z})$! Un punto que es denso se llama **genérico**.

Entonces un punto genérico, dependiendo de la intuición con la que se ve, puede ser pensado como un punto muy pequeño porque está dentro de todos los puntos o como un punto muy grande porque es denso.

Ejemplo: No todos los espacios tienen $\{0\}$ como punto genérico, por ejemplo $\mathbb{Z}_4$ (el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ con suma y producto de enteros tales que si con estas operaciones se obtiene un número > 4 se toma el residuo al dividirlo por 4). En este anillo, $2 * 2 = 0$ y $2 \neq 0$ por lo que el ideal $\{0\}$ NO es primo siquiera. De hecho, $Spec(\mathbb{Z}_4) = \{0, 2\}$. En este caso, el punto genérico es $\{0, 2\}$.

No todos los espacios tienen punto genérico siquiera: Si la intersección de todos los ideales primos no es primo entonces no existe (Görtz y Wedhorn, 2010).

En el ejemplo de $\mathbb{Z}$, hay otro fenómeno que podemos ver: Hay puntos dentro de puntos, ¡$\{0\} \subset \{p\mathbb{Z}\}$ para todo primo p! Podemos construir espacios con infinitos puntos dentro de un punto, por ejemplo, los polinomios en infinitas variables $\mathbb{R}[x_1, x_2, ...]$. En este anillo, tenemos que los ideales $< x_1 >, < x_1, x_2 >, < x_1, x_2, x_3 >, < x_{1,}x_{2,}x_3, x_4 >, ...$ son primos y $\{< x_1 >\} \subset \{< x_1, x_2 >\} \subset ... \subset \{< x_1, ...x_n, ... >\} \subset ...$ es una cadena infinita de contenciones de puntos (Bourbaki, 2003) (Bourbaki, 2003).

Hay mucho que se puede decir de puntos en esta teoría, sin embargo eso sale esto del enfoque de este texto.

3 El punto al final de todo

Los puntos de la sección anterior se comportan diferente a lo que Euclides se imaginaba. Lo que se quiere en esta sección es extender el concepto de punto a objetos que se "comportan" como puntos.

Se mencionó que un punto, considerado como un conjunto unitario, es "Un conjunto P tal que, dado cualquier otro conjunto C, existe una única función $f : C \to P$". Esta propiedad se puede generalizar a **categorías**, que son una manera de pensar en matemáticas que consiste en "objetos y flechas".

3.1 *Categorías*

Una **categoría** es una colección de **objetos** (con cierta estructura en común definida a priori) y **morfismos** ("flechas") entre ellos que conservan la estructura dentro de cada objeto. Es decir, dados dos objetos A y B un morfismo es una flecha $A \xrightarrow{f} B$. No necesariamente existe solo una flecha entre objetos, en general hay muchas.

La noción intuitiva de esto es suficiente para nuestros propósitos, para las definiciones formales se puede recurrir a MacLane (1971) MacLane, 1971. Los morfismos cumplen que:

- Dados dos morfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ se puede hacer una composición $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ llamada $A \xrightarrow{g \circ f} C$ que es de nuevo un morfismo y es asociativo (i.e. si se añade un tercer morfismo $C \xrightarrow{h} D$ entonces $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$)
- Para cada objeto A existe un **morfismo identidad** $A \xrightarrow{id_A} A$ tal que $f \circ id_A = f$ y $id_A \circ g = g$ para todo $A \xrightarrow{f} B$ y $C \xrightarrow{g} A$

Las categorías, entonces, son una manera de agrupar todas las cosas que tienen alguna propiedad dada y poder "brincar" entre esas cosas tomando esa propiedad en cuenta.

Ejemplos de categorías (con sus respectivos nombres) son:

- **Objetos:** Conjuntos; **Morfismos:** funciones (llamada $\mathcal{S}et$)
- **Objetos:** Anillos; **Morfismos:** morfismos de anillos (es decir funciones que respetan las operaciones: $f(x + y) = f(x) + (y)$, $f(x * y) = f(x) * f(y)$) (Llamada $\mathfrak{Ring}$)
- **Objetos:** Espectros de anillos; **Morfismos:** Morfismos de espectros (dado un morfismo de anillos $f : R \to S$ se define $Spec(f) : Spec(S) \to Spec(R)$ como $Spec(f)(q) = f^{-1}(q)$ para todo punto $q \in Spec(S)$ (Llamada Aff)
- **Objeto:** Un polígono regular; **Morfismos:** Rotaciones del polígono

3.2 *Objetos terminales*

Podemos traducir la definición de conjuntos unitarios al lenguaje de categorías: Un conjunto P es unitario si, dado cualquier otro conjunto C, existe un único morfismo [de conjuntos] $f : C \to P$. Entonces un "punto" es un objeto en la categoría de conjuntos que cumple con la propiedad de arriba. Si cambiamos la categoría de $\mathcal{S}et$ a otra categoría, se puede generalizar:

Dada una categoría C, un objeto T es **terminal** si para todo otro objeto X existe un ÚNICO morfismo $X \to T$. Estos objetos no necesariamente son únicos, así como en un plano hay muchos puntos que cumplen con ser puntos. Pero son "esencialmente"únicos en el sentido de que dados dos objetos terminales existe una única manera de "ir" al segundo y de "regresar" al primero (MacLane, 1971).

Podemos pensar en los objetos terminales como 'puntos' con la estructura dictada por la categoría en la que están.

Ejemplos de objetos terminales son:

- En $\mathcal{S}et$ cualquier conjunto unitario $\{\bullet\}$

- En $\mathfrak{Ring}$, el anillo con un solo elemento $\{0\}$ (anillo 'trivial')
- En Aff es $Spec(\mathbb{Z})$, el espectro de los enteros
- La categoría rotaciones de un polígono regular no tiene objeto terminal ya que solo hay un objeto y muchas rotaciones que van del objeto a si mismo

Los objetos terminales son entonces "puntos" interesantes que conservan de cierta manera la propiedad que definió Euclides hace más de 2000 años.

4 Conclusión

Las matemáticas han avanzado tanto como la humanidad desde los días de Euclides. Es importante conocer a los clásicos y dejar que la intuición ayude a visualizar conceptos pero es igual de importante permitir que estas avancen tanto como la imaginación lo permita. El poder y la belleza de las matemáticas radica en su capacidad de crear objetos de estudio complicadísimos usando conceptos sencillos. Si se mantiene un pie en estos conceptos, en nuestro caso el de "punto", y se permite la libertad de empujar el concepto hasta donde se pueda, se abren nuevas posibilidades que se pueden explorar pero se mantiene una noción intuitiva que las liga a ideas conocidas.

5 Bibliografía

Referencias

Arkhangel'skii, A. V. (1990). *General Topology I: Basic Concepts and Constructions Dimension Theory, Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Book 17)*. Springer.

Atiyah, M., y MacDonald, I. G. (1994). *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company.

Bourbaki, N. (2003). Polynomials and rational fractions. En (cap. Algebra II. Elements of Mathematics). Springer.

Fitzpatrick, R. (2007). *Euclid's Elements of Geometry*.

Görtz, U., y Wedhorn, T. (2010). *Algebraic Geometry 1: Schemes with examples and exercises*. Vieweg+Teubner.

Halmos, P. (1960). *Naive set theory*. Van Nostrand Company (Reimpreso por Springer-Verlag (1974)).

Hartshorne, R. (1962). *Set Theory*. (Aumann, J.R. trad.).Chelsea Publishing Company (Original publicado en 1937).

Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics 52*. Springer-Verlag.

MacLane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician. Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag.

Newton, I. (1736). *The method of fluxions and infinite series: with its application to the geometry of curve-lines*. Impreso por Henry Woodfall; vendido por John Nourse.

Niven, I., Zuckerman, H., y Montgomery, H. L. (1960). *Introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley and Sons, Inc.

Salicrup, G. (1993). *Aportaciones Matemáticas: Introducción a la topología*. Eds: Rosenbleuth, J. y Prieto, C.), Sociedad Mexicana de Matemáticas (Reimpreso por Sociedad Mexicana de Matemáticas (1997)).