

Existencia de Solución de un Sistema Elíptico Estacionario Uni-Dimensional mediante el Teorema del Punto silla Generalizado

Existence of a Solution of a One-Dimensional Stationary Elliptic System by the Generalized Saddle Point Theorem

Rubén Rojas* and Hans Nina

Recepción: 9/1/2026 Aceptación: 24/6/2026 Publicación: 28/7/2026

Resumen: En este trabajo se prueba la existencia de soluciones no triviales para un sistema elíptico sublineal estacionario uni-dimensional. El análisis se fundamenta en la estructura variacional del problema, mediante la cual el sistema se reformula como la búsqueda de puntos críticos de un funcional definido en un espacio de Banach adecuado. Bajo este marco, se aplica el teorema del punto de silla generalizado de Rabinowitz para garantizar la existencia de dichas soluciones.

Abstract: In this work, we establish the existence of nontrivial solutions for a one-dimensional stationary sublinear elliptic system. The analysis is based on the variational structure of the problem, through which the system is reformulated as

Corresponding Author*: Rubén Rojas V.

Universidad de Atacama, Avenida Copayapu 465, Copiapó - Chile., e-mail: ruben.rojas@uda.cl
Parcialmente apoyado por Universidad de Atacama, Proyecto 22418 DIUDA 2023.

Hans Nina H.

Universidad de Antofagasta, Avenida Universidad de Antofagasta 2800, Antofagasta - Chile., e-mail: hans.nina@uantof.cl

the search for critical points of a functional defined on an appropriate Banach space. Within this framework, the generalized saddle point theorem of Rabinowitz is applied to guarantee the existence of such solutions.

Palabras Claves: Condición de Compacidad de Palais-Smale · Estructura Variacional · Teorema del Punto Silla Generalizado.

Keywords: Palais-Smale Compactness Condition · Variational Structure · Generalized Saddle Point Theorem.

2020 Mathematics Subject Classification 35J47 · 35J50 · 35J57

1.1 Introducción

Muchos problemas en ecuaciones diferenciales pueden ser expresados como una ecuación de la forma

$$f(u) = 0 \quad (1)$$

donde f es una función continua definida sobre un espacio de Banach $\mathbf{X}$. Es conocido que la ecuación anterior tiene estructura variacional cuando

$$f(u) = (D\varphi)(u)$$

donde φ es un funcional sobre $\mathbf{X}$, el cual es Frechet diferenciable con derivada $D\varphi$. Las soluciones de la ecuación (1) son los puntos críticos del funcional φ .

Si el funcional es acotado inferiormente, hay varios resultados del cálculo variacional en los cuales se encuentra un valor mínimo para φ , ver por ejemplo [7],[8] y [9]. Sin embargo, si el funcional no es acotado inferiormente, el problema de encontrar puntos críticos puede ser resuelto por otras técnicas tales como los métodos de minimax, que aparecen por primera vez en los trabajos de Birkoff [6]. En el contexto de las ecuaciones diferenciales citamos los trabajos de Ambrosetti y Rabinowitz [1], incluyendo el Teorema del Paso de la Montaña, el Teorema del Punto de Silla de Rabinowitz [10] y sus generalizaciones que involucran el concepto de enlace en dimensión infinita dada por Benci y Rabinowitz [5].

Actualmente, numerosos trabajos han empleado teoremas de tipo minimax en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales elípticas, hiperbólicas y sistemas hamiltonianos; véanse, por ejemplo, [3] y [4]. El objetivo principal de este trabajo es aplicar el método variacional para establecer la existencia de soluciones no triviales de un sistema elíptico sublineal estacionario unidimensional. La demostración se fundamenta en la aplicación del Teorema del Punto de Silla Generalizado de Rabinowitz, en la formulación desarrollada por Felmer [2].

1.2 Preliminares y Definiciones

En esta sección introduciremos algunas definiciones y el teorema que utilizaremos en nuestro estudio de existencia de soluciones de un sistema elíptico sublineal.

Definition 1. Decimos que $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición de Palais-Smale (P.S), si toda sucesión $\{u_n\} \subset \mathbb{H}$ tal que

$$\{f(u_n)\} \text{ es acotada}$$

y

$$\nabla f(u_n) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

posee una subsucesión convergente. (Para más detalles ver [9],[10]).

Definition 2. Si $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$ definimos $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ las proyecciones inducidas por la partición.

Sea $R > 0$, definimos $Q = \{u \in \mathbb{E}_1 : \|u\| < R\}$ donde ∂Q es la frontera de Q respecto a $\mathbb{E}_1$.

El siguiente teorema es una versión dada por Felmer [2] (Teorema 1.1 pág. 481) del Teorema del Punto Silla Generalizado de Rabinowitz [10].

Theorem 1. Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Hilbert real, con $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$. Supongamos que $f \in C^1(\mathbb{E}, \mathbb{R})$ satisface la condición de Palais-Smale (P.S) y las siguientes condiciones:

- $f_1)$ $f(u) = \langle \mathbb{L}u, u \rangle + \mathbf{b}(u)$ donde $\mathbb{L} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ es autoadjunta.
- $f_2)$ La derivada (c/r a u) $\mathbf{b}'$ es compacta.
- $f_3)$ Consideremos una familia de operadores lineales acotados $\mathbb{B}(s) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ donde $s \in (0, 1]$; $\mathbb{B}(s_0) = Id$ y $\mathbb{B}$ depende continuamente sobre s . Supongamos que $v \in \mathbb{R}_0^+$. Entonces el operador lineal

$$\tilde{\mathbb{B}} = \mathbb{P}_2 \exp(v\mathbb{L})\mathbb{B}(s) : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$$

es invertible y su inversa depende continuamente de s y v .

- $f_4)$ Existen constantes $\alpha > \omega$ tal que

- $a.$ $f(u) \geq \alpha \quad \forall u \in \mathbb{E}_1.$
- $b.$ $f(u) \leq \omega \quad \forall u \in \partial Q.$

Entonces f posee al menos un punto crítico, con valor crítico $c \geq \alpha$, caracterizado por

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} f(h(t, u))$$

donde

$$\Gamma = \{h \in C([0, 1] \times \mathbb{E}, \mathbb{E}) : h \text{ satisface } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ y } \Gamma_3\}$$

con

- $\Gamma_1)$ h es dada por $h(t, u) = \exp(v\mathbb{L})\mathbb{B}(s)u + \mathbb{K}(t, u)$ tal que s y v dependen continuamente de $u \in \mathbb{E}$, $t \in [0, 1]$, $\mathbb{K} : [0, 1] \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ es compacta y $\mathbb{K}(0, u) = 0$.
- $\Gamma_2)$ $h(t, u) = u$, $\forall u \in \partial Q$.
- $\Gamma_3)$ $h(0, u) = u$, $\forall u \in Q$.

1.3 Sistema Elíptico Sublineal

Los teoremas de puntos críticos constituyen una herramienta fundamental en el estudio moderno de las ecuaciones diferenciales parciales, con aplicaciones significativas en problemas elípticos, hiperbólicos y en sistemas hamiltonianos.

En esta sección, se analizará la existencia de soluciones no triviales para un sistema elíptico sublineal estacionario uni-dimensional, mediante técnicas de análisis variacional sustentadas en la teoría de puntos críticos.

Sean $T > 0$ y $u, v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos el sistema de ecuaciones elípticas

$$\begin{aligned} -\ddot{u} &= v^\alpha \\ -\ddot{v} &= u^\beta \end{aligned} \quad (2)$$

con condiciones de borde

$$u(0) = u(T) = v(0) = v(T) = 0 \quad (3)$$

donde $\alpha \cdot \beta < 1$ con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Estudiamos existencia de soluciones del sistema (2) a través del método variacional.

Definamos el funcional $\mathbb{J} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathbb{J}(u, v) = \int_0^T \dot{u} \cdot \dot{v} - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |u|^{1+\beta} + \frac{1}{1+\alpha} |v|^{1+\alpha} \quad (4)$$

donde $\mathbb{E} = H_0^1([0, T]) \times H_0^1([0, T])$. De [10], $\mathbb{J}$ es de clase C^1 .

Multiplicando por $h_2 \in C_0^1([0, T])$ la primera ecuación del sistema (2) y por $h_1 \in C_0^1([0, T])$ la segunda ecuación, obtenemos

$$-\ddot{u} \cdot h_2 - v^\alpha \cdot h_2 - \ddot{v} \cdot h_1 - u^\beta \cdot h_1 = 0.$$

Ahora, integramos esta igualdad respecto a $t \in [0, T]$ y realizamos integración por partes en el primer término y en el tercer término

$$-\dot{u}(0)h_2(0) + \dot{u}(T)h_2(T) - \dot{v}(0)h_1(0) + \dot{v}(T)h_1(T) + \int_0^T (\dot{u} \cdot \dot{h}_2 + \dot{v} \cdot \dot{h}_1 - v^\alpha \cdot h_2 - u^\beta \cdot h_1) dt = 0.$$

Para cualquier $(h_1, h_2) \in H_0^1([0, T]) \times H_0^1([0, T])$ obtenemos

$$\int_0^T (\dot{u} \cdot \dot{h}_2 + \dot{v} \cdot \dot{h}_1 - v^\alpha \cdot h_2 - u^\beta \cdot h_1) dt = 0.$$

Las funciones $(u, v) \in \mathbb{E}$ que satisfacen la identidad anterior son llamadas soluciones débiles del sistema (2). Observamos que las soluciones débiles del sistema (2) coinciden con los puntos críticos del funcional $\mathbb{J}$. Un argumento de regularidad que por el momento no trataremos, muestra que $(u, v) \in C^2(0, T) \times C^2(0, T)$. En lo que sigue probaremos la existencia de solución del sistema (2) mostrando existencia de puntos críticos del funcional $\mathbb{J}$.

Notemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{J}(u, u) &= \|u\|_{H_0^1}^2 - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |u|^{1+\beta} + \frac{1}{1+\alpha} |u|^{1+\alpha}, \\ \mathbb{J}(u, -u) &= -\|u\|_{H_0^1}^2 - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |u|^{1+\beta} + \frac{1}{1+\alpha} |u|^{1+\alpha},\end{aligned}$$

lo que sugiere la aplicación del teorema del punto de silla.

Consideremos los siguientes subespacios

$$\mathbb{E}_1 = \left\{ \left(\rho^r z, \frac{z}{\rho^r} \right) : z \in H_0^1([0, T]) \right\}, \quad \mathbb{E}_2 = \left\{ \left(\frac{\omega}{\rho^r}, -\rho^r \omega \right) : \omega \in H_0^1([0, T]) \right\}$$

y definamos $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$.

Sea $\rho > 0$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned}r(1+\beta) + 1 + \beta &< 2 \\ -r(1+\alpha) + 1 + \alpha &< 2\end{aligned}$$

de cuyas desigualdades se tiene que $\alpha \cdot \beta < 1$. Bajo las condiciones anteriores el sistema (2) admite solución no trivial.

Theorem 2. *El sistema elíptico definido en (2) posee una solución no trivial.*

Proof. Como lo señalamos anteriormente, probaremos existencia de puntos críticos no triviales del funcional $\mathbb{J}$ para probar el teorema.

Mostraremos que el funcional $\mathbb{J}$ satisface las hipótesis del teorema Punto Silla Generalizado. Consideremos el espacio de Hilbert $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$, donde $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{E}_2$ son los subespacios definidos anteriormente con $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ las proyecciones de $\mathbb{E}$ sobre $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{E}_2$ respectivamente. Sea

$$\mathbb{L}(u, v) = \mathbb{L}_1 \mathbb{P}_1(u, v) + \mathbb{L}_2 \mathbb{P}_2(u, v)$$

donde

$$\mathbb{L}_1(\rho^r z, \frac{z}{\rho^r}) = (\frac{z}{\rho^r}, \rho^r z)$$

y

$$\mathbb{L}_2(\frac{\omega}{\rho^r}, -\rho^r \omega) = (-\rho^r \omega, \frac{\omega}{\rho^r}).$$

Tomando

$$\mathbf{b}(u, v) = - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |u|^{1+\beta} + \frac{1}{1+\alpha} |v|^{1+\alpha}$$

y reescribiendo el funcional $\mathbb{J}$ como

$$\mathbb{J}(u, v) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{L}(u, v), (u, v) \rangle + \mathbf{b}(u, v)$$

se obtiene $\mathbf{f}_1$, y por [10] se tiene $\mathbf{f}_2$.

Consideremos la familia de operadores lineales acotados $\mathbb{B}(s) : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, definido por

$$\mathbb{B}(s)(u, v) = (su, \frac{v}{u})$$

donde $s \in (0, 1]$ y $\mathbb{B}(1) = Id$.

Sea $(u, v) \in \mathbb{E}_1$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(u, v) &= \|z\|_{H_0^1}^2 - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |\rho^r z|^{1+\beta} + \frac{1}{1+\alpha} |\frac{z}{\rho^r}|^{1+\alpha} \\ &\geq \|z\|_{H_0^1}^2 - c_1 \rho^{r(1+\beta)} \|z\|_{H_0^1}^{1+\beta} - c_2 \rho^{-r(1+\alpha)} \|z\|_{H_0^1}^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Observamos que para un $z \in H_0^1([0, T])$ tal que $\|z\|_{H_0^1} = \rho$, considerando $\rho > 0$ suficientemente grande, el funcional $\mathbb{J}$ es positivo. Similarmente para un ρ suficientemente pequeño se obtiene un mínimo negativo para el funcional $\mathbb{J}$ sobre el subespacio $\mathbb{E}_1$. Es decir, existe $a > 0$ tal que $\mathbb{J}(u, v) \geq -a$, $\forall (u, v) \in \mathbb{E}_1$.

Ahora consideremos $(u, v) \in \mathbb{E}_2$, entonces

$$\mathbb{J}(u, v) = -\|\omega\|_{H_0^1}^2 - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |\frac{\omega}{\rho^r}|^{1+\beta} + \frac{1}{1+\alpha} |-\rho^r \omega|^{1+\alpha} \leq 0.$$

Existe un $R > 0$ y $b > a$ tal que

$$\mathbb{J}(u, v) \leq -b, \quad \forall (u, v) \in \partial Q$$

donde

$$Q = \{(\frac{\omega}{\rho^r}, -\rho^r \omega) \in \mathbb{E}_2 : \|\omega\|_{H_0^1}^2 \leq R\}$$

y se obtiene $\mathbf{f}_4$.

Sea $\{(u_n, v_n)\} \subset \mathbb{E}$ una sucesión tal que:

- i. $|\mathbb{J}(u_n, v_n)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- ii. $|\mathbb{J}(u_n, v_n)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Mostraremos que $\{(u_n, v_n)\}$ posee una subsucesión convergente.

$$(u_n, v_n) = (\rho^r z_n, \frac{z_n}{\rho^r}) + (\frac{\omega_n}{\rho^r}, -\rho^r \omega_n) \in \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2.$$

Por (i) obtenemos

$$\begin{aligned}
-M &\leq \|z_n\|^2 - \|\omega_n\|^2 + \left(\frac{1}{\rho^{2r}} - \rho^{2r}\right) \int_0^T \dot{z}_n \cdot \dot{\omega}_n - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |\rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r}|^{\beta+1} \\
&\quad + \frac{1}{1+\alpha} \left| \frac{z_n}{\rho^r} - \rho^r \omega_n \right|^{\alpha+1} \leq M.
\end{aligned}$$

Usando (ii) para un n suficientemente grande obtenemos

$$|\mathbb{J}'(z_n, \omega_n)(h, k)| \leq \varepsilon_n \|(h, k)\| \quad (5)$$

con $\varepsilon_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Observamos de (i) que

$$\begin{aligned}
\|\omega_n\|^2 &\leq \|z_n\|^2 + \left(\frac{1}{\rho^{2r}} - \rho^{2r}\right) \int_0^T \dot{z}_n \cdot \dot{\omega}_n - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |\rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r}|^{\beta+1} \\
&\quad - \int_0^T \frac{1}{1+\alpha} \left| \frac{z_n}{\rho^r} - \rho^r \omega_n \right|^{\alpha+1} + M \\
&\leq \|z_n\|^2 + cte \|z\| \|\omega\| + M
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\{\omega_n\}$ es acotada si $\{z_n\}$ es acotada.

Supongamos que $\|z_n\| \rightarrow \infty$ y $\|\omega_n\| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Como $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\alpha \cdot \beta < 1$, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\alpha > 1$, lo que implica que $\beta - 1 < 0$

Eligiendo $(h, k) = (z_n, 0)$ en (5),

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_n \|z_n\|^2 &\leq 2\|z_n\|^2 + 2\left(\frac{1}{\rho^{2r}} - \rho^{2r}\right) \int_0^T \dot{z}_n \cdot \dot{\omega}_n - \rho^r \int_0^T |\rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r}|^{\beta-1} (\rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r}) \cdot z_n \\
&\quad - \frac{1}{\rho^r} \int_0^T \left| \frac{z_n}{\rho^r} - \rho^r \omega_n \right|^{\alpha-1} \left(\frac{z_n}{\rho^r} - \rho^r \omega_n \right) \cdot z_n \\
&\leq \varepsilon_n \|z_n\|.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
2\|z_n\|^2 &\leq \varepsilon_n \|z_n\|^2 - 2\left(\frac{1}{\rho^{2r}} - \rho^{2r}\right) \int_0^T \dot{z}_n \cdot \dot{\omega}_n + \rho^r \int_0^T |\rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r}|^{\beta-1} (\rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r}) \cdot z_n \\
&\quad + \frac{1}{\rho^r} \int_0^T \left| \frac{z_n}{\rho^r} - \rho^r \omega_n \right|^{\alpha-1} \left(\frac{z_n}{\rho^r} - \rho^r \omega_n \right) \cdot z_n.
\end{aligned}$$

Ahora tomando $(h, k) = (0, \omega_n)$ en (5) y sumándola con la desigualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
2\|(z_n, \omega_n)\|^2 &\leq \varepsilon_n \|z_n\| + \varepsilon_n \|\omega_n\| + \int_0^T \left| \frac{z_n}{\rho^r} - \rho^r \omega_n \right|^{\alpha-1} \\
&\quad - \int_0^T \left| \rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r} \right|^{\beta-1} (\rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r}) \cdot (\frac{\omega_n}{\rho^r} - \rho^r z_n) \\
&\leq \varepsilon_n \|z_n\| + \varepsilon_n \|\omega_n\| - \int_0^T \left| \rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r} \right|^{\beta-1} (\frac{\omega_n}{\rho^r} - \rho^r z_n).
\end{aligned} \tag{6}$$

Multiplicamos (6) por $\|(z_n, \omega_n)\|^{-2}$ obtenemos que

$$2 \leq \varepsilon_n \frac{\|z_n\|}{\|(z_n, \omega_n)\|^2} + \varepsilon_n \frac{\|\omega_n\|}{\|(z_n, \omega_n)\|^2} - \int_0^T \left| \rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r} \right|^{\beta+1} \cdot \frac{(\frac{\omega_n}{\rho^r} - \rho^r z_n)}{\|(z_n, \omega_n)\|^2}.$$

Como $\xi_n = \frac{1}{\|(z_n, \omega_n)\|^2} \cdot (\rho^r z_n + \frac{\omega_n}{\rho^r})$ es una sucesión acotada y $b_0 = -\int_0^T \frac{1}{\beta+1} |x|^{\beta+1}$ es de clase C^1 y b_0 es compacta, entonces $\mathbf{b}'(\xi_n)$ posee una subsucesión convergente, de donde se obtiene que

$$\|(z_n, \omega_n)\|^{\beta-1} \int_0^T |\xi_n|^\beta \frac{(\frac{\omega_n}{\rho^r} - \rho^r z_n)}{\|(z_n, \omega_n)\|^2} \rightarrow 0 \tag{7}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $2 \leq 0$.

Consecuentemente $\{(z_n, \omega_n)\}$ es acotada y con ello $\{(u_n, v_n)\}$ también lo es. Por otro lado observamos que

$$\mathbb{J}'(u_n, v_n)(h, k) = \langle (\rho^r z_n, \frac{z_n}{\rho^r}), (h, k) \rangle + \langle (\frac{\omega_n}{\rho^r}, -\rho^r \omega_n), (h, k) \rangle + \mathbf{b}'(u_n, v_n)(h, k)$$

considerando las proyecciones P_1 y P_2 sobre los subespacios $\mathbb{E}_1$ y $\mathbb{E}_2$ respectivamente, tenemos que:

$$P_1(\mathbb{J}'(u_n, v_n)) = (\rho^r z_n, \frac{z_n}{\rho^r}) + P_1(\mathbf{b}'(u_n, v_n)),$$

$$P_2(\mathbb{J}'(u_n, v_n)) = (\frac{\omega_n}{\rho^r}, -\rho^r \omega_n) + P_2(\mathbf{b}'(u_n, v_n)),$$

de (ii) se tiene que $P_l(\mathbb{J}'(u_n, v_n)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, $l = 1, 2$ lo que implica

$$(\rho^r z_n, \frac{z_n}{\rho^r}) + P_1(\mathbf{b}'(u_n, v_n)) \rightarrow 0,$$

$$(\frac{\omega_n}{\rho^r}, -\rho^r \omega_n) + P_2(\mathbf{b}'(u_n, v_n)) \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. La sucesión $\{(u_n, v_n)\}$ es acotada y $\mathbf{b}'$ compacta, entonces

$$\{(\rho^r z_n, \frac{z_n}{\rho^r})\} \quad \text{y} \quad \{(\frac{\omega_n}{\rho^r}, -\rho^r \omega_n)\}$$

posee una subsucesión convergente, de donde se sigue que $\mathbb{J}$ satisface la condición de compacidad Palais-Smale.

Aplicando el Teorema de Punto Silla Generalizado, $\mathbb{J}$ posee un punto crítico con valor crítico caracterizado por

$$\inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q} \mathbb{J}(h(u)) \geq -a$$

el cual es solución del sistema (2) y condición de frontera (3).

Definimos las siguientes funciones $\lambda, \gamma \in C^1([0, R], \mathbb{R})$:

$$\lambda(s) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } s \in [0, R-2] \\ 1, & \text{si } s \in [R-1, R] \end{cases}$$

$$\gamma(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \in [0, R-2] \\ 0, & \text{si } s \in [R-1, R] \end{cases}$$

con $\lambda > 0$ y $\gamma < 0$ en $[R-2, R-1]$, donde $R = \omega$ definido en $(\mathbf{f}_4), (b)$.

Sea $e_1 \in \mathbb{E}_1$ tal que $\mathbb{J}(e_1) = -a$ y definamos la función

$$h((u, v), 1) = \mathbb{B}(\lambda(\|(u, v)\|))(u, v) + \gamma(\|(u, v)\|)e_1.$$

Claramente $h \in \Gamma$. Mostraremos que

$$\sup_{(u, v) \in Q} \{\mathbb{J}(h(u, v))\} < 0.$$

Distingamos dos casos.

Caso 1. $(u, v) \in Q$ y $\|(u, v)\| \in [0, R-1]$. En este caso tenemos

$$h(u, v) = \left(\frac{\lambda \omega}{\rho^r}, \frac{-\rho^r \omega}{\lambda} \right) + (\gamma \rho^r z, \gamma \frac{z}{\rho^r})$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{J}(h(u, v)) &= -\|\omega\|^2 + \left(\frac{\lambda \gamma}{\rho^{2r}} - \frac{\gamma \rho^{2r}}{\lambda} \right) \int_0^T \dot{z} \cdot \dot{\omega} + \gamma^2 \|z\|^2 \\ &\quad - \int_0^T \frac{1}{1+\beta} |\gamma \rho^r z|^{1+\beta} + \frac{1}{1+\alpha} |\gamma \frac{z}{\rho^r}|^{\alpha+1} \\ &\leq -\|\omega\|^2 + \left(\frac{\lambda \gamma}{\rho^{2r}} - \frac{\gamma \rho^{2r}}{\lambda} \right) \|z\| \|\omega\| + \gamma^2 \|z\|^2 \\ &\quad - \int_0^T \frac{\gamma^{\beta+1}}{1+\beta} |\rho^r z|^{1+\beta} + \frac{\gamma^{\alpha+1}}{1+\alpha} |\frac{z}{\rho^r}|^{\alpha+1}. \end{aligned} \tag{8}$$

En el intervalo $[0, R-2]$ tenemos $\gamma = 1$ y $\lambda = \varepsilon > 0$. Además $\|z\| = \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es una constante que depende de R .

Entonces

$$\mathbb{J}(h(u, v)) \leq -\|\omega\|^2 + \mathbf{C}\|\omega\| + \mathbb{J}(e_1) < 0$$

en $[0, R-2]$.

Considerando un $R > 0$ suficientemente grande, se obtiene

$$\sup_{\substack{(u,v) \in Q \\ \|(u,v)\| \leq R-2}} \mathbb{J}(h(u, v)) < 0$$

Caso 2. $(u, v) \in Q$ y $\|(u, v)\| \in [R-1, R]$. En este caso tenemos

$$h(u, v) = \mathbb{B}(1)(u, v) + 0 \cdot e_1 = (u, v) \in Q \subset \mathbb{E}_2.$$

Entonces tenemos que $\mathbb{J}(h(u, v)) < 0$.

Consecuentemente

$$\sup_{(u,v) \in Q} \mathbb{J}(h(u, v)) < 0$$

y considerando el hecho que $\mathbb{J}(0) = 0$, implica que el punto crítico asociado a $c < 0$ es no trivial. Completando la demostración del teorema.

1.4 Conclusiones

En este trabajo se establece la existencia de soluciones no triviales para un sistema elíptico sublineal unidimensional.

Bajo condiciones de borde homogéneas y la hipótesis $\alpha \cdot \beta < 1$, el problema se formula en un marco variacional mediante un funcional $\mathbb{J}$ definido sobre un espacio de Banach adecuado. Se verifican condiciones suficientes que aseguran la existencia de puntos críticos de $\mathbb{J}$, lo que implica la existencia de soluciones no triviales del sistema. La demostración se basa en la aplicación del Teorema del Punto Silla Generalizado, en la versión de Felmer [2].

Quedan pendientes el análisis de la unicidad y la regularidad de las soluciones obtenidas. Asimismo, resulta natural extender el análisis al caso no estacionario.

References

1. Ambrosetti A. and Rabinowitz P., Dual variational methods in critical point theory and applications, Journal Functional Analysis, 14 (1973), 349-381.
2. Felmer, P., Heteroclinic orbits for spatially periodic Hamiltonian system, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. No Lineaire 8 (1991), 477-497.
3. Felmer, P., Periodic solutions of spatially periodic Hamiltonian system, J. Differential Equations 98 (1992), 143-168.

4. Felmer, P., Periodic solutions of Superquadratics Hamiltonian system, *Journal Differential Equations* 102 (1993), 188-207.
5. Benci V. and Rabinowitz P., Critical point theorems for indefinite functionals, *invent. Math.* 52 (1979), 143-197.
6. Birkoff G. and Lewis D., On the periodic motion near a given periodic motion of a dynamical systems. *Ann. Math. Pura Appl.* 12 (1933), 117-133.
7. De Figueiredo D., Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours, *Lect. Notes, college on variational problems in analysis, trieste* (1988).
8. Ekeland I., On the variational principle, *Journal Math. Anal. Appl.* 47 (1974), 324-353.
9. Mawhin J. and Willem M., *Critical point theory and Hamiltonian system.* *Appl. Math. Sci.* 74, Springer, (1989).
10. Rabinowitz P., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C.B.M.S. regional conference series in Mathematics 65, Ams Providence (1986).